

**№23 (94) 2010**  
**Выпуск 21**  
**НАУЧНЫЙ РЕЦЕНЗИРУЕМЫЙ ЖУРНАЛ**

Основан в 1995 г.

**Журнал входит  
в Перечень ведущих рецензируемых  
научных журналов и изданий,  
выпускаемых в Российской Федерации,  
в которых рекомендуется публикация  
основных результатов диссертаций  
на соискание ученых степеней  
доктора и кандидата наук**

**Учредитель:**  
Государственное образовательное  
учреждение высшего профессионального  
образования «Белгородский  
государственный университет»

**Издатель:**  
Белгородский государственный  
университет.  
Издательство БелГУ

Журнал зарегистрирован  
в Федеральной службе по надзору  
за соблюдением законодательства  
в сфере массовых коммуникаций  
и охраны культурного наследия

Свидетельство о регистрации средства  
массовой информации ПИ № ФС77-21121  
от 19 мая 2005 г.

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
ЖУРНАЛА**

Главный редактор

**Л.Я. Дятченко,**  
ректор Белгородского государственного  
университета,  
доктор социологических наук,  
профессор

Зам.главного редактора

**А.П. Пересыткин,**  
проректор по научной работе  
Белгородского государственного  
университета, кандидат  
педагогических наук

Ответственные секретари:

**В.М. Московкин,**  
доктор географических наук, профессор  
кафедры мировой экономики  
Белгородского государственного  
университета

**Е.Н. Кролевецкая,**  
доцент кафедры педагогики  
Белгородского государственного  
университета, кандидат  
педагогических наук

**РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ  
СЕРИИ ЖУРНАЛА**

Главный редактор серии

**Ю.П. Вирченко,**  
доктор физико-математических  
наук (Белгородский  
государственный университет)

**НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ**  
**Белгородского государственного университета**  
**Математика Физика**

**Belgorod State University**  
**Scientific bulletin**  
**Mathematics & Physics**

## СОДЕРЖАНИЕ

О разрешимости одного интегрального уравнения  
в банаховом пространстве. **Х.К. Авад** 5

Непрерывность вероятности перколяции  
бернуллиевских случайных полей на однородных  
древесных графах.  
**Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко** 11

Оценка характеристик кристаллов большой толщины  
с помощью излучения в них быстрых электронов.  
**Д.А. Бакланов, И.Е. Внуков, Ю.В. Жандармов,**  
**С.А. Лактионова, Р.А. Шатохин** 23

Моделирование некоторых фильтрационных течений  
с неизвестными границами. **Э.Н. Береславский,**  
**Л.А. Александрова, Е.В. Пестерев** 36

Несепарабельность случайных множеств с марковским  
измельчением в одномерном пространстве погружения.  
**Ю.П. Вирченко,**  
**О.Л. Штилинская** 51

О численном моделировании задачи Маскета  
со свободной границей. **О.В. Гальцев,**  
**О.А. Гальцева** 59

Весовые задачи Коши для абстрактного уравнения  
Мальмстена. **А.В. Глушак, О.А. Покручин** 68

Моделирование быстропротекающих процессов  
фильтрации несжимаемой жидкости через усреднение  
периодических структур: односкоростной континуум.  
**И.В. Некрасова** 75

Вторая краевая задача для телеграфного уравнения  
в ограниченной области. **В.А. Остапенко** 89

Заместители главного редактора:

**Н.В. Малай**,  
доктор физико-математических наук  
(Белгородский государственный  
университет)

**А.М. Мейрманов**,  
доктор физико-математических наук,  
профессор (Белгородский  
государственный университет)

Ответственный секретарь  
**М.Н. Бекназаров**,  
кандидат физико-математических наук  
(Белгородский государственный  
университет)

Члены редколлегии:

**С.В. Блажевич**, доктор физико-  
математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**И.Е. Внуков**, доктор физико-  
математических наук (Белгородский  
государственный университет)

**А.В. Глушаков**, доктор физико-  
математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**С.А. Гриценко**, доктор физико-  
математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**В.В. Красильников**, доктор  
физико-математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**Н.Н. Насонов**, доктор физико-  
математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**О.М. Пенкин**, доктор физико-  
математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**Г.А. Салищев**, доктор физико-  
математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**А.П. Солдатов**, доктор физико-  
математических наук, профессор  
(Белгородский государственный  
университет)

**В.В. Сыщенко**,  
доктор физико-математических  
наук (Белгородский  
государственный университет)

Подготовка к выпуску *Т.Г. Лагутина*  
Компьютерная вёрстка  
*Ю.П. Вирченко, Н.А. Гапоненко*  
e-mail: virch@bsu.edu.ru

Подписано в печать 20.12.2010  
Формат 60×84/8  
Гарнитура Georgia  
Усл. п. л. 16,38  
Тираж 1000 экз.  
Заказ 246

Подписные индексы в каталоге агентства  
«Роспечать» – 81631,  
в объединённом каталоге  
«Пресса России» – 39723

Оригинал-макет тиражирован  
в издательстве Белгородского  
государственного университета  
Адрес: 308015, г. Белгород, ул. Победы, 85

Особенности диффузиофоретического движения  
испаряющейся умеренно крупной капли.

**К.С. Рязанов** 105

Дифференциальное сечение и векторная  
анализирующая способность реакции упругого  
 $\text{dp}$ -рассеяния при энергии 2 ГэВ. **А.А. Терёхин**,  
**В.В. Глаголев**, **В.П. Ладыгин**,  
**Н.Б. Ладыгина** 114

Поперечные колебания многопролётного ротора  
на нелинейных опорах. **С.В. Филипковский** 122

*Письмо в редакцию.*

Исправления к опубликованной статье «Усредненные  
модели диффузии и конвекции примесей в абсолютно  
твёрдых пористых средах» (Научные ведомости БелГУ. –  
2009. № 13(68), вып. 17/2). **Св.А. Гриценко**,  
**А.М. Мейрманов** 135

Сведения об авторах 136

Информация для авторов 138

№ 23 (94) 2010  
Issue 21

SCIENTIFIC PEER-REVIEWED JOURNAL

Founded in 1995

The Journal is included into the list of the leading peer-reviewed journals and publications coming out in the Russian Federation that are recommended for publishing key results of the theses for Doktor and Kandidat degree-seekers.

**Founder:**

State educational establishment of higher professional education  
«Belgorod State University»

**Publisher:**

Belgorod State University  
BSU Publishing house

The journal is registered in Federal service of control over law compliance in the sphere of mass media and protection of cultural heritage

Certificate of registration of mass media  
ПИ № ФС 77-21121 May 19, 2005.

**EDITORIAL BOARD OF JOURNAL**

Editor-in-chief

**L.J. Djatchenko,**

Rector of Belgorod State University, doctor of sociological sciences, professor

Deputy editor-in-chief

**A.P. Peresyphkin,**

Vice-rector for scientific research of Belgorod State University, candidate of pedagogical sciences

Assistant Editors:

**V.M. Moskovkin,**

Doctor of geographical sciences, professor of world economy department Belgorod State University

**E.N. Krolevetskaya,**

Associate professor of Pedagogics department of Belgorod State University, candidate of pedagogical sciences

**EDITORIAL BOARD OF JOURNAL SERIES**

Editor-in-chief

**Yu.P. Virchenko,**

Doctor of physico-mathematical sciences, Professor (Belgorod State University)

Deputies of editor-in-chief:

**N.V. Malay,**

Doctor of physico-mathematical sciences, Professor (Belgorod State University)

**A.M. Meirmanov,**

Doctor of physico-mathematical sciences, Professor (Belgorod State University)

**Belgorod State University**  
**Scientific bulletin**  
**Mathematics & Physics**

**НАУЧНЫЕ ВЕДОМОСТИ**

**Белгородского государственного университета**

**Математика Физика**

**CONTENTS**

On the solvability of an integral equation in the Banach space. **H.K. Avad** 5

Continuity of Bernoulli random field percolation probability of uniform tree graphs. **E.S. Antonova, Yu.P. Virchenko** 11

Characteristics estimate of the large thickness crystals by means of fast electrons irradiation. **D.A. Baklanov, I.E. Vnukov, Yu.V. Zhandarmov S.A. Laktionova, R.A. Shatokhin** 23

Modelling of some filtration currents with unknown boundaries. **E.N. Bereslavskiy, L.A. Aleksandrova, E.V. Pesterev** 36

Nonseparability of random sets with markovian refinements in one-dimensional space. **Yu.P. Virchenko, O.L. Shpilinskaya** 51

About the numerical simulation of Masket problem. **O.V. Galtsev, O.A. Galtseva** 59

Weighted Cauchy problem for abstract Malmsten equation. **A.V. Glushak, O.A. Pokruchin** 68

Mathematical modeling of short-time filtration of incompressible fluid. The average of periodic structures and the one-velocity continuum. **I.V. Nekrasova** 75

Second boundary problem for telegraph equation in bounded domain. **V.A. Ostapenko** 89

Peculiarities of the diffusiophoresis movement of the evaporating and gently large drop. **K.S. Ryazanov** 105

Responsible secretary

**M.N. Beknazarov**,  
Candidate of physico-mathematical  
sciences (Belgorod State University)

Members of editorial board:

**S.V. Blazhevich**,  
Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**I.E. Vnukov**,  
Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**A.V. Glushak**,  
Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**S.A. Gritsenko**,  
Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**V.V. Krasnikov**,  
Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**N.N. Nasonov**,  
Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**O.M. Penkin**,  
Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**G.A. Salishchev**,  
Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**A.P. Soldatov**,  
Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

**V.V. Syshchenko**,  
Doctor of physico-mathematical sciences,  
Professor (Belgorod State University)

Prepared for publication by the copy-editor

*T.G. Lagutina*

Dummy layout by *Yu.P. Virchenko*,

*N.A. Gaponenko*

e-mail: virch@bsu.edu.ru

Passed for printing 20.12.2010

Format 60x84/8

Typeface Georgia

Printer's sheets 16,38

Circulation 1000 copies

Order 246

Subscription reference in Rospechat'

agency catalogue – 81631,

In joint catalogue Pressa Rossii – 39723

Dummy layout is replicated at  
Belgorod State University Publishing House  
Address: 85, Pobedy str., Belgorod, Russia,  
308015

Differential cross section and vector analyzing power  
in DP-elastic scattering at 2.0 GeV. **A.A. Terekhin**,  
**V.V. Glagolev**, **V.P. Ladygin**, **N.B. Ladygina** 114

Multispan rotor transverse l oscillations on nonlinear  
bearings. **S.V. Filipkovsky** 122

Letter to editorial board.

Corrigendum of «Averaged models of impurity diffusion  
and its convection in absolute solid porous media».

**Sv.A. Gritsenko**, **A.M. Meirmanov** 135

Information about Authors 136

Information for Authors 138



УДК 517.983

## О РАЗРЕШИМОСТИ ОДНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Х.К. Авад

Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия

**Аннотация.** Доказывается разрешимость в банаховом пространстве интегрального уравнения, к которому сводится задача Коши для дифференциального уравнения дробного порядка с переменным оператором.

**Ключевые слова:** дифференциальные уравнения дробного порядка, интегральное уравнение типа Вольтерра, функция Райта.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения в банаховом пространстве  $E$

$$D_{\tau,t}^{\alpha} u(t) = A(t)u(t), \quad t \in (\tau, b], \quad \tau \geq 0, \quad (1)$$

$$\lim_{t \rightarrow \tau} D_{\tau,t}^{\alpha-1} u(t) = u_0, \quad (2)$$

где  $D_{\tau,t}^{\alpha-1} u(t) = I_{\tau,t}^{1-\alpha} u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{\tau}^t (t-s)^{-\alpha} u(s) ds$  – левосторонний дробный интеграл Римана-Лиувилля порядка  $1-\alpha$ ,  $0 < \alpha < 1$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ ,  $D_{\tau,t}^{\alpha} u(t) = \frac{d}{dt} I_{\tau,t}^{1-\alpha} u(t)$  – левосторонняя дробная производная Римана-Лиувилля порядка  $\alpha$ ,  $A(t)$  – линейный, замкнутый оператор.

**Условие 1.**

а) Линейный оператор  $A(t)$  при каждом  $t \in [0, b]$  имеет плотную в  $E$  и независящую от  $t$  область определения  $D$ .

б) При любом  $\lambda$  с  $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$  оператор  $\lambda I - A(t)$  имеет ограниченный обратный, причем

$$\|(\lambda I - A(t))^{-1}\| \leq \frac{M_1}{1 + |\lambda|}, \quad M_1 > 0. \quad (3)$$

с) Кроме того, для любых  $t, \tau, s \in [0, b]$  справедливо неравенство

$$\|(A(t) - A(\tau))A^{-1}(s)\| \leq M_2 |t - \tau|^{\gamma}, \quad M_2 > 0, \quad \gamma \in (0, 1]. \quad (4)$$

Из условия (3) вытекает (см. [1]), что оператор  $A(t)$  при  $\tau \geq 0$  является генератором сильно непрерывной полугруппы  $e^{\tau A(t)}$  и

$$\|e^{\tau A(t)}\| \leq M_3 e^{-\delta\tau}, \quad M_3 > 0, \delta > 0. \quad (5)$$

В дальнейшем нами будет использована неотрицательная функция (см. [2], с.357)

$$f_{\tau,\nu}(t) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \exp(tz - \tau z^\nu) dz, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases} \quad (6)$$

где  $\sigma > 0$ ,  $\tau > 0$ ,  $0 < \nu < 1$  и ветвь функции  $z^\nu$  выбрана так, что  $\operatorname{Re} z^\nu > 0$  при  $\operatorname{Re} z > 0$ . Эта ветвь является однозначной функцией на комплексной  $z$ -плоскости с разрезом по отрицательной части вещественной оси. Сходимость интеграла (6) обеспечивается множителем  $\exp(-\tau z^\nu)$ .

Заметим также, что функция  $f_{\tau,\nu}(t)$  при  $t > 0$  может быть выражена через функцию Райта (см. [3], с.54)

$$f_{\tau,\nu}(t) = t^{-1} \phi(-\nu, 0; -\tau t^{-\nu}), \quad \phi(a, b; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k! \Gamma(ak + b)},$$

или через более общую функцию типа Райта (см. [4], гл. 1)

$$f_{\tau,\nu}(t) = t^{-1} e_{1,\nu}^{1,0}(-\tau t^{-\nu}), \quad e_{\alpha,\beta}^{\mu,\delta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \mu) \Gamma(\delta - \beta k)}, \quad \alpha > \max\{0; \beta\}, \mu, z \in \mathbb{C}. \quad (7)$$

Отметим, что для функции Райта справедливо неравенство (см. [4], лемма 1.2.7)

$$\phi(-\nu, 0; -x) \leq M_4 (1 + x^n) \exp(-\rho x^{1/(1-\nu)}), \quad (8)$$

$$n \in \mathbf{N}, \quad n \geq \frac{1}{1-\nu}, \quad \rho = (1-\nu)\nu^{\nu/(1-\nu)}, \quad x \geq 0.$$

Введем в рассмотрение операторную функцию

$$T_\alpha(t - \tau; A(\tau)) = \int_0^\infty f_{\xi,\alpha}(t - \tau) e^{\xi A(\tau)} d\xi. \quad (9)$$

При решении задачи (1), (2) методом Соболевского-Танабе [1] устанавливается, что ее разрешающий оператор  $U_\alpha(t, \tau)$  удовлетворяет интегральному уравнению Вольтерра

$$U_\alpha(t, \tau) - T_\alpha(t - \tau; A(\tau)) = \int_\tau^t U_\alpha(t, s) (A(s) - A(\tau)) T_\alpha(s - \tau; A(\tau)) ds. \quad (10)$$



При сделанных предположениях на оператор  $A(t)$  и  $u_0 \in D$  доказывается, что интегральное уравнение (10) разрешимо, а  $u(t) = U_\alpha(t, \tau)u_0$  – единственное решение задачи (1), (2), для которого функция  $I_{\tau, t}^{1-\alpha} u(t)$  сильно непрерывно дифференцируема при  $t > \tau$ .

Прежде чем переходить к решению интегрального уравнения (10), установим следующую лемму.

**Лемма.** Пусть выполнено условие 1, тогда для определяемой равенством (9) операторной функции  $T_\alpha(t - \tau; A(\tau))$  справедливы оценки

$$\|T_\alpha(t - \tau; A(\tau))\| \leq M_6(t - \tau)^{\alpha-1}, \quad (11)$$

$$\|A(\tau)T_\alpha(t - \tau; A(\tau))\| \leq M_7(t - \tau)^{-1}. \quad (12)$$

□ Учитывая оценку (5) и равенство (2.2.31) [4], получим

$$\|T_\alpha(t - \tau; A(\tau))\| \leq \int_0^\infty f_{\xi, \alpha}(t - \tau) \|e^{\xi A(\tau)}\| d\xi \leq$$

$$\leq M_3 \int_0^\infty f_{\xi, \alpha}(t - \tau) e^{-\delta\xi} d\xi = M_3(t - \tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\delta(t - \tau)^\alpha) \leq M_6 (t - \tau)^{\alpha-1},$$

где  $E_{\mu, \rho}(z) = \sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\mu k + \rho)}$  – функция типа Миттаг-Леффлера. Неравенство (11) тем самым установлено, и мы переходим к доказательству неравенства (12).

Используя определение функции  $f_{\xi, \alpha}(t - \tau)$  и ее асимптотику (8), интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} A(\tau)T_\alpha(t - \tau; A(\tau)) &= \int_0^\infty f_{\xi, \alpha}(t - \tau) A(\tau) e^{\xi A(\tau)} d\xi = \int_0^\infty f_{\xi, \alpha}(t - \tau) \frac{d}{d\xi} e^{\xi A(\tau)} d\xi = \\ &= - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \xi} (f_{\xi, \alpha}(t - \tau)) e^{\xi A(\tau)} d\xi. \end{aligned} \quad (13)$$

Для производной функции типа Райта справедливо представление (см. [2], с. 362)

$$\frac{\partial}{\partial \xi} f_{\xi, \alpha}(t - \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \exp(((t - \tau)r + \xi r^\alpha) \cos \theta_\alpha) \sin((t - \tau)r - \xi r^\alpha \sin \theta_\alpha) r^\alpha dr, \quad (14)$$

где  $\theta_\alpha = \frac{\pi}{1 + \alpha} > \frac{\pi}{2}$ ,  $\cos \theta_\alpha < 0$ .

Из (13), (14) и (5) после элементарных преобразований будем иметь

$$\begin{aligned} \|A(\tau)T_\alpha(t - \tau; A(\tau))\| &\leq \frac{M_3}{\pi} \int_0^\infty \exp((t - \tau)r \cos \theta_\alpha) r^\alpha dr \int_0^\infty \exp(\xi r^\alpha \cos \theta_\alpha - \delta \xi) d\xi = \\ &= \frac{M_3}{\pi} \int_0^\infty \exp((t - \tau)r \cos \theta_\alpha) \frac{r^\alpha}{\delta - r^\alpha \cos \theta_\alpha} dr \leq M \int_0^\infty \exp((t - \tau)r \cos \theta_\alpha) dr = \frac{M_7}{t - \tau}, \end{aligned}$$

и оценка (12), а вместе с нею и лемма также доказаны. ■

Считая выполненным условие 1, будем решать методом последовательных приближений интегральное уравнение (10). Получим

$$U_\alpha(t, \tau) = \sum_{k=0}^\infty U_{\alpha,k}(t, \tau), \tag{15}$$

где

$$\begin{aligned} U_{\alpha,0}(t, \tau) &= T_\alpha(t - \tau; A(\tau)), \\ U_{\alpha,k+1}(t, \tau) &= \int_\tau^t U_{\alpha,k}(t, s)(A(s) - A(\tau))T_\alpha(s - \tau; A(\tau)) ds. \end{aligned} \tag{16}$$

Покажем, что

$$U_{\alpha,k}(t, \tau) = \int_\tau^t T_\alpha(t - s; A(s))\Phi_k(s, \tau) ds, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{17}$$

где  $\Phi_1(t, \tau) = (A(t) - A(\tau))T_\alpha(t - \tau; A(\tau))$ , а

$$\Phi_{k+1}(t, \tau) = \int_\tau^t \Phi_k(t, s)\Phi_1(s, \tau) ds. \tag{18}$$

Действительно, это верно для  $k = 1$ . Если это верно для  $k = n$ , то, в силу (16),

$$\begin{aligned} U_{\alpha,n+1}(t, \tau) &= \int_\tau^t U_{\alpha,n}(t, s)(A(s) - A(\tau))T_\alpha(s - \tau; A(\tau)) ds = \\ &= \int_\tau^t \left( \int_s^t T_\alpha(t - \xi; A(\xi))\Phi_n(\xi, s) d\xi \right) \Phi_1(s, \tau) ds. \end{aligned}$$





Поменяв порядок интегрирования и учитывая (18), получим

$$\begin{aligned} U_{\alpha, n+1}(t, \tau) &= \int_{\tau}^t T_{\alpha}(t - \xi; A(\xi)) \left( \int_{\tau}^{\xi} \Phi_n(\xi, s) \Phi_1(s, \tau) ds \right) d\xi = \\ &= \int_{\tau}^t T_{\alpha}(t - \xi; A(\xi)) \Phi_{n+1}(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned}$$

Следовательно, формула (17) справедлива при любом  $k$ . Положим

$$\Phi(t, \tau) = \sum_{k=1}^{\infty} \Phi_k(t, \tau).$$

Легко видеть, что, в силу (18), этот оператор удовлетворяет уравнению

$$\Phi(t, \tau) = \Phi_1(t, \tau) + \int_{\tau}^t \Phi(t, s) \Phi_1(s, \tau) ds \quad (19)$$

и

$$U_{\alpha}(t, \tau) = T_{\alpha}(t - \tau; A(\tau)) + \int_{\tau}^t T_{\alpha}(t - s; A(s)) \Phi(s, \tau) ds. \quad (20)$$

**Пример.** Примером оператора  $A(t)$ , удовлетворяющего условию 1, служит оператор

$$A(t)u(t, x) = \sum_{i,j=1}^m a_{i,j}(t, x) \frac{\partial^2 u(t, x)}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^m a_i(t, x) \frac{\partial u(t, x)}{\partial x_i} + a(t, x)u(t, x),$$

область определения  $D$  которого состоит из всех функций пространства  $W_p^2(\Omega)$ , обращающихся на границе в нуль,  $E = L_p(\Omega)$ ,  $p > 1$ .

Предположим, что функции  $a_{i,j}(t, x)$  непрерывно дифференцируемы по  $x$ , а все функции  $\frac{\partial a_{i,j}(t, x)}{\partial x_m}$ ,  $a_i(t, x)$ ,  $a(t, x)$  непрерывны по совокупности переменных при  $t \in [0, T]$  и  $x \in \bar{\Omega}$ . Пусть также все функции  $a_{i,j}(t, x)$ ,  $a_i(t, x)$ ,  $a(t, x)$  удовлетворяют по  $t$  условию Гёльдера с показателем  $\gamma > 0$  и константой Гёльдера, не зависящей от  $x$ . Кроме того,  $a_{i,j}(t, x) = a_{j,i}(t, x)$  и для любых  $\xi \in R^m$

$$- \sum_{i,j=1}^m a_{i,j}(t, x) \xi_i \bar{\xi}_j \geq \varepsilon \sum_{i=1}^m |\xi_i|^2, \quad \varepsilon > 0.$$

Пусть, наконец,  $\operatorname{Re} a(t, x) \geq a_0 > 0$ , где  $a_0$  – достаточно большая постоянная.

Из перечисленных условий вытекает (см. [1]), что оператор  $A(t)$  удовлетворяет условию 1.



### Литература

1. Соболевский П.Е. Об уравнениях параболического типа в банаховых пространствах // Тр.Моск. матем. общ. – 1961. – 10. – С.297-350.
2. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. – М.: Мир, 1967.
3. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and application of fractional differential equations / A.A Kilbas, H.M. Srivastava, J.J. Trujillo J.J. – Elsevier, 2006.
4. Псху А.В. Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными дробного и континуального порядка / А.В. Псху. – Нальчик: Изд-во КБНЦ РАН, 2005.

## ON THE SOLVABILITY OF AN INTEGRAL EQUATION IN THE BANACH SPACE

Н.К. Awad

Belgorod State University,  
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia

**Abstract.** The solvability of integral equation in Banach space which reduces the Cauchy problem of fractional order differential equations with variable operator is proved.

**Key words:** fractional order differential equations, Volterra integral equation, Wright function.



УДК 517.987

## НЕПРЕРЫВНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ПЕРКОЛЯЦИИ БЕРНУЛЛИЕВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ НА ОДНОРОДНЫХ ДРЕВЕСНЫХ ГРАФАХ

Е.С. Антонова, Ю.П. Вирченко

Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: [antonova\\_e\\_s@mail.ru](mailto:antonova_e_s@mail.ru)

**Аннотация.** В работе рассматривается «задача узлов» дискретной теории перколяции на графах типа однородного дерева Кэли. Изучается вероятность перколяции  $P(c)$  однородного бернуллиевского случайного поля из корневой вершины. Доказано, что при любом индексе  $s \in \{2, 3, 4, \dots\}$  ветвления дерева функция  $P(c)$  непрерывна.

**Ключевые слова:** вероятность перколяции, однородное дерево Кэли, бернуллиевское случайное поле.

**1. Введение.** Теория перколяции изучает задачи, связанные с понятием связности случайных множеств (см., например, [1]-[3]). Она подразделяется на два самостоятельных направления – дискретная и непрерывная теории перколяции. Несмотря на важность теории для приложений, в особенности в физике твёрдого тела, ввиду чрезвычайной сложности возникающих в ней задач, имеется не так уж много точно установленных математических фактов. Это касается как результатов качественного характера, так и количественных оценок основных перколяционных характеристик с гарантированной точностью. Основные математические достижения в теории перколяции относятся к дискретной её части, которая имеет дело со случайными множествами на бесконечных графах, которые при заданной структуре смежности исходного графа порождают на нём случайные подграфы.

В настоящей работе изучается самая простая модель дискретной теории перколяции, в которой случайное множество индуцируется однородным бернуллиевским случайным полем и бесконечный граф является однородным деревом с постоянным порядком ветвления. Эта модель является исторически первой перколяционной моделью, возникшей ещё до появления термина *перколяция* и формулировки основных понятий теории, а именно, своим появлением она обязана теории ветвящихся марковских случайных процессов с дискретным временем (см., например, [4]), а именно, теории процесса Гальтона-Ватсона. Несмотря на это, до сих пор имеется ряд связанных с рассматриваемой моделью невыясненных принципиальных вопросов. Статья носит, скорее, методический характер и служит введением в проблематику, относящуюся к указанной перколяционной модели.

**2. Перколяция на однородном древесном графе.** Будем рассматривать бесконечные неориентированные графы  $\langle V, \Phi \rangle$ , не содержащие петель, где  $V$  – множество вершин графа и  $\Phi \subset V \times V$  – симметричное подмножество, не содержащее точек диагонали  $\{\langle x, x \rangle; x \in V\}$ , которое определяет отношение смежности вершин. В дальнейшем



вершины графа мы будем обозначать жирными строчными буквами латинского алфавита. Если пара  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle \in \Phi$ , то они называются смежными и отношение их смежности мы будем обозначать  $\mathbf{x}\varphi\mathbf{y}$ .

Всякую последовательность  $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \rangle$  конечную или бесконечную, для которой имеет место  $\mathbf{x}_k\varphi\mathbf{x}_{k+1}$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ , называется путём на графе  $\langle V, \Phi \rangle$ . При этом первая компонента последовательности называется началом пути. Пути на графе мы будем обозначать греческой буквой  $\gamma$ . Число компонент этой последовательности  $\gamma = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots \rangle$  называется длиной пути и мы будем обозначать эту величину посредством  $|\gamma|$ . В частности, если последовательность бесконечна, то  $|\gamma| = \infty$ . Путь называется несамопересекающимся, если для любого  $k \in \mathbb{N}_+$  имеет место  $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_{k+l}$ ,  $l \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbf{x}_0 \equiv \mathbf{x}$ .

**Определение 1.** Граф  $\langle V, \Phi \rangle$  называется однородным деревом с порядком ветвления  $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ , если множество его вершин  $V$  состоит из вершины  $\mathbf{0}$ , которая называется корневой, и множества вершин  $\mathbf{z}$ , которое координатизируется множеством конечных последовательностей  $\langle j_1, \dots, j_n \rangle$ , где  $j_k = 1 \div s$ ,  $k = 1 \div n$  для всех  $n \in \mathbb{N}$ . Таким образом,  $V = \{\mathbf{0}\} \cup \{\mathbf{z} : \mathbf{z} = \langle j_1, \dots, j_n \rangle\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Множество  $\Phi$  смежности этого графа определяется следующими отношениями смежности:  $\mathbf{0}\varphi\langle j \rangle$  и

$$\langle j_1, \dots, j_n \rangle \varphi \langle j_1, \dots, j_n, j \rangle, \quad j = 1 \div s$$

для любой вершины, определяемой последовательностью  $\langle j_1, \dots, j_n \rangle$  с  $j_k = 1 \div s$ ,  $k = 1 \div n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

**Определение 2.** Случайное поле  $\langle \tilde{c}(\mathbf{x}); \mathbf{x} \in V \rangle$  на графе  $\langle V, \Phi \rangle$  называется однородным бернуллиевским, если все случайные величины  $\tilde{c}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in V$  статистически независимы в совокупности, принимают только два значения  $\{0, 1\}$  и одинаково распределены.

Бернуллиевское однородное поле полностью определяется значением вероятности  $c = \text{Pr}\{\tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\}$ , которую мы будем называть концентрацией. Бернуллиевское случайное поле на графе индуцирует случайное множество с пространством погружения  $V$ , случайные реализации которого определяются формулой  $\tilde{C} = \{\mathbf{x} : \tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\}$ . В дальнейшем эти реализации мы называем конфигурациями. Каждая случайная конфигурация определяет на графе  $\langle V, \Phi \rangle$  случайный подграф, множеством вершин которого служит  $\tilde{C}$ , а отношение смежности индуцируется отношением смежности  $\Phi$  исходного графа. При этом пути на исходном графе устанавливаются отношения связности на любом случайном подграфе. Легко понять, что это отношение связности является отношением эквивалентности. Поэтому каждая случайная конфигурация  $\tilde{C}$  разбивается дизъюнктивным образом на связные компоненты, согласно введённому понятию эквивалентности.

Обозначим посредством  $\tilde{C}_0$  связную компоненту конфигурации, которая содержит корневую вершину  $\mathbf{0}$ . Если  $\mathbf{0} \notin \tilde{C}$ , то положим  $\tilde{C}_0 = \emptyset$ . Вероятность  $\text{Pr}\{|\tilde{C}_0| = \infty\} = P(c)$  называется вероятностью перколяции из корневой вершины (здесь и далее символ  $|\cdot|$  обозначает число элементов множества). Если она положительна, то говорят, что из неё имеется перколяция. Очевидно, что данное определение вероятности перколяции



эквивалентно следующему

$$P(c) = \Pr\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| = \infty)\}.$$

Далее, посредством  $\gamma$  мы обозначаем пути на  $\tilde{C}$ , начинающиеся в корневой вершине. Если путь начинается в другой вершине, то этот факт мы отмечаем соответствующими индексами. В том случае, когда длина пути  $\gamma$  не меньше, чем  $n$ , то будем говорить, что имеется перколяция на расстояние  $n$  от корневой вершины. Обозначим вероятность этого случайного события посредством  $P_n(c)$ . Таким образом,

$$P_n(c) = \Pr\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geq n)\}.$$

При этом положим

$$P_0(c) = \Pr\{\tilde{C}_0 \neq \emptyset\} = c.$$

**Замечание 1.** Имеется связь между перколяцией на однородных деревьях и марковскими ветвящимися случайными процессами с дискретным временем [4]. Наличие перколяции с точки зрения теории таких процессов означает, что для них реализуется т.н. *надкритический режим*.

**3. Вероятность перколяции.** В этом разделе мы обсудим свойства вероятности перколяции из корневой вершины однородного дерева, непосредственно вытекающие из её определения, и покажем как в этом случае она вычисляется.

Обозначим посредством  $P_n(c)$  вероятность перколяции из корневой вершины на расстояние  $n$ , то есть вероятность того, что на случайной конфигурации  $\tilde{C} = \{\mathbf{x} : \tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\}$  существует путь  $\gamma$  из корневой вершины, имеющий длину не менее, чем  $n$ . Она является функцией от концентрации  $\Pr\{\tilde{c}(\mathbf{x}) = 1\} = c$ . Таким образом, вероятность  $P_n(c)$  определяется формулой

$$P_n(c) = \Pr\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geq n)\}.$$

Непосредственно из этого определения, замечаем, что верна

**Теорема 1.** *Последовательность функций  $\langle P_n(c); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$  такова, что при каждом  $c \in [0, 1]$  числовая последовательность  $\langle P_n(c); n \in \mathbb{N} \rangle$  является невозрастающей и существует предел  $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(c)$ .*

□ Очевидно, что имеет место включение случайных событий

$$\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geq n + 1)\} \subset \{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geq n)\}.$$

Поэтому для вероятностей этих событий выполняется неравенство, утверждаемое в формулировке теоремы,

$$P_{n+1}(c) = \Pr\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geq n + 1)\} \leq \Pr\{\exists(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geq n)\} = P_n(c).$$

Так как  $P_n(c) \geq 0$  для любого  $c \in [0, 1]$ , то для всех значений  $c$  невозрастающие числовые последовательности  $\langle P_n(c); n \in \mathbb{N} \rangle$  ограничены снизу, что приводит к утверждению теоремы. ■

Следствием этой теоремы является связь между вероятностью перколяции  $P(c)$  и вероятностями  $P_n(c)$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$ .

**Теорема 2.** *Имеет место*

$$P(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(c). \quad (1)$$

□ Формула (1) доказывается использованием свойства непрерывности вероятности относительно теоретико-множественного предельного перехода,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Pr \{ \exists (\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geq n) \} &= \Pr \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \exists (\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| \geq n) \} \right) = \\ &= \Pr \{ \exists (\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| = \infty) \} = P(c). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

**Определение 3.** *Число*

$$c_* = \inf \{ c : P(c) > 0 \}$$

*называется порогом перколяции однородного бернуллиевского поля на графе  $\langle V, \Phi \rangle$ .*

Введём вероятности  $Q_n(c) = 1 - P_n(c)$  того, что на конфигурации  $\tilde{C} = \{ \mathbf{x} : \tilde{c}(\mathbf{x}) = 1 \}$  все пути  $\gamma$  из корневой вершины графа имеют длину менее  $n$ ,

$$Q_n(c) = \Pr \{ \forall (\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n) \}. \quad (2)$$

**Теорема 3.** *В каждой точке  $c \in [0, 1]$  последовательность функций  $\langle Q_n(c); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$  не убывает и имеет предел, равный  $Q(c) = 1 - P(c)$ .*

□ Первая часть утверждения следует из связи  $Q_n(c) = 1 - P_n(c)$  значений функций  $Q_n$  и  $P_n$  и из монотонного невозрастания последовательности  $\langle P_n(c); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$  при каждом  $c \in [0, 1]$ . Монотонно неубывающая числовая последовательность  $\langle Q_n(c); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ ,  $c \in [0, 1]$  всегда имеет предел. На основании (1) это предельное значение  $Q(c)$  равно

$$Q(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_n(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - P_n(c)) = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(c) = 1 - P(c). \quad \blacksquare \quad (3)$$

Свойство невозрастания каждой из функций  $Q_n(c)$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  приводит к тому, что справедлива

**Теорема 4.** *Функция  $Q(c)$  не возрастающая ( $P(c)$  не убывающая) на  $[0, 1]$ .*

□ Сформулированное утверждение следует из того, что все функции  $Q_n(c)$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  невозрастающие по  $c$ , и поточечный предел последовательности  $\langle Q_n(c); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$  является невозрастающей функцией. ■

Особенностью перколяции на древесных графах является то, что совокупность вероятностей  $Q_n(c)$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  или совокупность вероятностей  $P_n(c)$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  удовлетворяют соответствующему разностному уравнению, на основе которого они могут быть вычислены, последовательно переходя от значения  $n$  к  $(n + 1)$ .



**Теорема 5.** Если однородное дерево имеет порядок ветвления равный  $s \in \{2, 3, 4, \dots\}$ , вероятности  $Q_n(c)$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  связаны уравнением

$$Q_{n+1}(c) = 1 - c + c Q_n^s(c). \quad (4)$$

□ Воспользуемся дизъюнктивным разложением

$$\{\forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n + 1)\} = \{\tilde{C}_0 = \emptyset\} \cup \{\tilde{C}_0 \neq \emptyset, \forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n + 1)\}.$$

Второе событие в этом разложении запишем в следующей форме

$$\begin{aligned} \{\tilde{C}_0 \neq \emptyset, \forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n + 1)\} &= \\ &= \{\tilde{C}_0 \neq \emptyset, \forall(\gamma_1 \subset \tilde{C}_0 : |\gamma_1| < n), \dots, \forall(\gamma_s \subset \tilde{C}_0 : |\gamma_s| < n)\} = \\ &= \bigcap_{j=1}^s \{\tilde{C}_0 \neq \emptyset, \forall(\gamma_j \subset \tilde{C}_0 : |\gamma_j| < n)\}, \end{aligned}$$

где  $\gamma_j$  – пути, начинающиеся соответственно в вершинах  $\langle j \rangle$ ,  $j = 1 \div s$  и не содержащие корневую вершину. События

$$\{\tilde{C}_0 \neq \emptyset, \forall(\gamma_j \subset \tilde{C}_0 : |\gamma_j| < n)\}, \quad j = 1 \div s$$

условно независимы относительно условия  $\{\tilde{C}_0 \neq \emptyset\}$ . Это следует из того, что компонента  $\tilde{C}_0$  случайной конфигурации представляется в виде дизъюнктивного объединения путей  $\gamma_j$ ,  $j = 1 \div s$  и одноточечного множества  $\{0\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Pr\{\tilde{C}_0 \neq \emptyset, \forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n + 1)\} &= \\ &= \left( \prod_{j=1}^s \Pr\{\tilde{C}_0 \neq \emptyset, \forall(\gamma_j \subset \tilde{C}_0 : |\gamma_j| < n) | \tilde{C}_0 \neq \emptyset\} \right) \Pr\{\tilde{C}_0 \neq \emptyset\}. \end{aligned}$$

Так как  $\Pr\{\tilde{C}_0 \neq \emptyset\} = c$  и все условные вероятности  $\Pr\{\tilde{C}_0 \neq \emptyset, \forall(\gamma_j \subset \tilde{C}_0 : |\gamma_j| < n) | \tilde{C}_0 \neq \emptyset\}$ ,  $j = 1 \div s$  совпадают, ввиду однородности дерева, и равны безусловной вероятности  $\Pr\{\forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n)\}$ , то мы получаем

$$\Pr\{\tilde{C}_0 \neq \emptyset, \forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n + 1)\} = Q_n^s(c).$$

Учитывая, кроме того, что  $\Pr\{\tilde{C}_0 = \emptyset\} = 1 - c$ , находим

$$\Pr\{\tilde{C}_0 \neq \emptyset, \forall(\gamma \subset \tilde{C}_0 : |\gamma| < n + 1)\} = 1 - c + c Q_n^s(c). \quad \blacksquare$$

**Следствие 1.** Вероятности  $P_n(c)$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  подчинены уравнению

$$P_{n+1}(c) = c(1 - (1 - P_n(c))^s).$$



На основе уравнения (4) вероятности  $Q_n(c)$  вычисляются однозначным образом на при использования "начального" условия  $Q_0(c) = 1 - c$ .

**Теорема 6.** Все функции  $Q_n(c)$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  – убывающие.

□ Из уравнения (4) имеем

$$Q'_{n+1}(c) = Q_n^s(c) - 1 + sc Q_n^{s-1}(c)Q'_n(c) \tag{5}$$

и, кроме того,  $Q'_0(c) = -1 < 0$ . Так как  $Q_n^s(c) \leq 1$ , то индукцией по  $n \in \mathbb{N}_+$ , используя соотношение (5) в качестве индукционного шага получаем утверждение теоремы. ■

Из рекуррентного соотношения (4) сразу следует

**Теорема 7.** Вероятность  $Q(c)$  является решением уравнения

$$Q(c) = 1 - c + cQ^s(c), \tag{6}$$

которое подчинено неравенствам  $0 \leq Q(c) \leq 1$ . Точно также вероятность  $P(c)$  является решением уравнения

$$P(c) = c(1 - (1 - P(c))^s), \quad 0 \leq P(c) \leq 1.$$

□ Доказательство получается переходом к пределу  $n \rightarrow \infty$  в (4) с использованием (3). Уравнение для вероятности  $P(c)$  получается из (6) заменой  $Q(c) = 1 - P(c)$ . ■

**4. Основная теорема.** На основании следующего утверждения будет дан ответ на вопрос о поведении вероятности  $Q(c)$ , как функции от концентрации  $c$ .

**Лемма.** Пусть значения каждой из совокупности функций  $\{h_s(\cdot, c) : [0, 1] \mapsto \mathbb{R}; c \in [0, 1], s \in \{2, 3, \dots\}\}$  определяются формулой

$$h_s(z, c) = cz^s - z + 1 - c, \quad z \in [0, 1]. \tag{7}$$

Тогда уравнение

$$h_s(z, c) = 0 \tag{8}$$

имеет:

- 1) единственный корень  $z = 1$  при условии  $cs \leq 1$ ;
- 2) два корня  $\{1, z_*(c)\}$ ,  $z_*(c) < 1$  при условии  $cs > 1$ .

□ Функция  $h_s(z, c)$  выпукла по  $z$ , и поэтому уравнение (2) имеет не более двух корней. При любых значениях  $c \in [0, 1]$  это уравнение имеет корень  $z = 1$ ,  $h_s(1, c) = 0$ .

Так как  $h_s(0, c) = 1 - c > 0$ , то для того чтобы существовал на интервале  $(0, 1)$  единственный корень, необходимо и достаточно чтобы минимум функции  $h_s(\cdot, c)$  достигался на  $(0, 1)$  и был отрицателен.

Точкой минимума функции  $h_s(\cdot, c)$  является  $z_m = (sc)^{-1/(s-1)}$ . Из этого выражения видно, что  $z_m \in (0, 1)$  тогда и только тогда, когда  $cs > 1$ . Таким образом, при  $cs \leq 1$





функция  $h_s(\cdot, c)$  не имеет минимума на  $(0, 1)$ , и поэтому  $h_s(z, c) > 0$ ,  $z \in (0, 1)$ , что доказывает утверждение 1) леммы.

Пусть  $cs > 1$ . Тогда

$$\begin{aligned} h_s(z_m, c) &= c^{-1/(s-1)} (s^{-s/(s-1)} - s^{-1/(s-1)}) + 1 - c = \\ &= c^{-1/(s-1)} [c^{1/(s-1)}(1 - c) - s^{-1/(s-1)}(1 - s^{-1})]. \end{aligned} \quad (9)$$

Определим значения функции  $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$  формулой  $g(y) = y(1 - y^{s-1})$ . Эта функция достигает максимума на  $[0, 1]$  в точке  $s^{-1/(s-1)}$ . Следовательно, полагая  $y = c^{1/(s-1)}$ , имеем  $g(c^{1/(s-1)}) < g(s^{-1/(s-1)})$  при  $c \neq 1/s$  или, что эквивалентно,

$$c^{1/(s-1)}(1 - c) < s^{-1/(s-1)}(1 - s^{-1}).$$

Поэтому из выражения (9) следует, что  $h_s(z_m, c) < 0$ . Это означает, что в рассматриваемом случае существует единственный корень  $z_*(c)$  уравнения (8) на интервале  $(0, 1)$ .

Так как  $h_s(0, c) > 0$ , то из утверждения 2) леммы следует, что необходимым и достаточным условием для выполнимости неравенства  $h_s(z, c) > 0$  является условие  $z < z_*(c)$ . ■

Следующая теорема выявляет строение функции  $Q(c)$ , которая является решением уравнения (6). При её доказательстве, казалось бы, естественно было использовать теорему о неявной функции. Однако, оказывается, гораздо проще воспользоваться ограничением, которое возникает вследствие утверждения доказанной леммы, благодаря предельному соотношению (3) и разностному уравнением (4).

**Теорема 8.** Функция  $Q(c)$  ( $P(c)$ ) определяется следующими формулами:

- 1)  $Q(c) \equiv 1$  ( $P(c) \equiv 0$ ) при  $c \leq s^{-1}$ ;
- 2)  $Q(c) = z_*(c)$  ( $P(c) = 1 - z_*(c)$ ) при  $c > s^{-1}$ .

□ Утверждение 1) тривиально, так как решение уравнения (6) единственно и равно 1 при  $c \leq s^{-1}$ .

Ввиду того, что при каждом  $c \in [0, 1]$  выполняется  $Q_{n+1}(c) \geq Q_n(c)$ , используя (4), получаем неравенство

$$cQ_n^s - Q_n(c) + 1 - c \geq 0,$$

то есть  $h_s(Q_n(c), c) > 0$ , что эквивалентно неравенству (см. лемма 3)  $Q_n(c) \leq z_*(c) < 1$ . Переходя к пределу  $n \rightarrow \infty$  в этом неравенстве, на основании (2), имеем  $Q(c) \leq z_*(c) < 1$ . С другой стороны, так как при каждом  $c \in [0, 1]$  функция  $Q(c)$  может быть равна только либо  $z_*(c)$ , либо 1, то  $Q(c) = z_*(c)$ . ■

Заметим, что при доказательстве теоремы не было использовано *a priori* свойство непрерывности функции  $Q(c)$ , которое само нуждается в отдельном доказательстве (см. **Следствие 3**).

**Следствие 2.** Точка  $c = s^{-1}$  является порогом перколяции случайного однородного бернуллиевского поля на однородном древесном графе с порядком ветвления  $s$ .

**Следствие 3.** Функция  $Q(c)$  вещественно-аналитична на  $(1/s, 1)$  и непрерывна в точке  $c = 1/s$ .



□ Функция  $Q(c)$  является вещественно-аналитической на  $(1/s, 1)$ , так как она в этом случае определяется как ветвь аналитической функции, являющейся решением уравнения  $h_s(z, c) = 0$ , коэффициенты которого аналитическим образом зависят от  $c$ .

Функция  $Q(c)$  непрерывна при  $c \in [0, 1]$ , так как она непрерывна на  $[0, 1/s)$  и  $(1/s, 1]$ . Кроме того,  $z_*(c) \rightarrow 1$  при  $c \rightarrow 1/s + 0$ , так как в этом случае  $z_m \rightarrow z_*(c)$  и  $h_s(z_m, c) \rightarrow 0$ . ■

Непрерывность функции в  $Q(c)$  в точке  $c = 1/s$ , где у неё имеется особенность, с физической точки зрения означает, что в этой точке происходит фазовый переход второго рода.

**Следствие 4.** При  $c > 1/s$  функция  $Q(c)$  подчинена неравенству

$$scQ^{s-1}(c) < 1. \tag{10}$$

□ Так как функция  $Q(c)$  – вещественно-аналитическая при  $c > 1/s$ , то  $|Q'(c)| < \infty$  при этих значениях  $c$ , и поэтому из уравнения (6) следует

$$Q'(c)(1 - scQ^{s-1}(c)) = Q^s(c) - 1. \tag{11}$$

Это указывает на то, что  $1 \neq scQ^{s-1}(c)$ . С другой стороны, при  $Q(1) = 0$ , то есть неравенство (10) выполняется в точке  $c = 1$ . Поэтому, по непрерывности, ввиду необращаемости в нуль функции  $(1 - scQ^{s-1}(c))$  на  $(1/s, 1]$ , получаем, что (10), действительно, имеет место на этом полуинтервале. ■

**Замечание 2.** Неравенство (10) можно доказать непосредственно. Так как функция  $h_s(\cdot, c)$  выпукла, то есть  $\partial h_s(z, c)/\partial z$  монотонно возрастает по  $z \in \mathbb{R}$ , имеем неравенство

$$\frac{\partial h_s(z, c)}{\partial z} > \left( \frac{\partial h_s(z, c)}{\partial z} \right)_{z=z_*(c)} \tag{12}$$

при  $z > z_*(c)$ . Положим  $z = z_m$ . Так как в точке  $z = z_m$  реализуется отрицательный минимум, а в точке  $z_*(c)$  происходит пересечение нулевого уровня слева от точки минимальности, то  $z_m > z_*(c)$ , и поэтому неравенство (12) выполняется. Заметив, что

$$\left( \frac{\partial h_s(z, c)}{\partial z} \right)_{z=z_m} = sz_m^{s-1} - 1 = 0,$$

получим из (16) неравенство  $scz_*^{s-1}(c) - 1 < 0$ , эквивалентное (10).

**Теорема 9.** При  $c > 1/s$  производная  $Q'(c)$  определяется формулой

$$Q'(c) = \frac{Q^s(c) - 1}{1 - csQ^{s-1}(c)} \tag{13}$$

и строго отрицательна, то есть  $Q(c)$  монотонно убывает.

□ Отрицательность следует из того  $Q(c) < 1$  при  $c > 1/s$  и неравенства (10). ■



**Замечание 3.** Монотонное убывание функции  $Q(c)$  следует также из монотонного убывания каждой из функций  $Q_n(c)$ ,  $n \in \mathbb{N}_+$  и предельного соотношения (3), так как предел последовательности монотонно убывающих функций является монотонно невозрастающей функцией.

**Следствие 5.** *Имеет место формула*

$$\lim_{c \rightarrow 1/s+0} Q'(c) = -\frac{2s}{s-1}. \quad (14)$$

□ Так как

$$\lim_{c \rightarrow 1/s+0} \frac{Q^l(c) - 1}{Q(c) - 1} = l, \quad l \in \mathbb{N},$$

то, используя значение этого предела при  $l = s, s - 1$ ,

$$\begin{aligned} A \equiv \lim_{c \rightarrow 1/s+0} Q'(c) &= \lim_{c \rightarrow 1/s+0} \frac{Q^s(c) - 1}{1 - sc Q^{s-1}(c)} = s \lim_{c \rightarrow 1/s+0} \frac{Q(c) - 1}{1 - sc Q^{s-1}(c)} = \\ &= \frac{s}{\lim_{c \rightarrow 1/s+0} \frac{1 - cs}{Q(c) - 1} - s + 1}. \end{aligned}$$

Предел, стоящий в знаменателе последнего выражения, на основе правила Лопиталья, сводится к

$$\lim_{c \rightarrow 1/s+0} \frac{1 - cs}{Q(c) - 1} = -\frac{s}{s/A + (s - 1)}.$$

Отсюда следует уравнение ( $A \neq 0$ )

$$1 = -\frac{s}{s + (s - 1)A},$$

решение которого даёт формулу (14). ■

Конечность правой производной функции  $Q(c)$  в точке  $1/s$ , с физической точки зрения, означает, что возникновение новой фазы в точке фазового перехода происходит без появления "критического режима", что является нетипичным в статистической физике.

**Теорема 10.** *При  $c > 1/s$  производная  $Q''(c)$  равна*

$$Q''(c) = \frac{sQ^{s-2}(c)(1 - Q(c))}{(1 - sc Q^{s-1}(c))^3} H_s(c), \quad (15)$$

где значения функции  $H_s : [1/s, 1] \mapsto \mathbb{R}$  определяются формулой

$$H_s(c) = 2sc + (s - 1)Q(c) - (s + 1).$$

Она строго положительна, то есть  $Q(c)$  выпукла.

□ Дифференцируя согласно формуле (13), получаем

$$\begin{aligned} Q''(c) &= \frac{sQ^{s-2}(c)}{(1 - scQ^{s-1}(c))^2} \times \\ &\times [Q'(c)(c(s-1)(Q^s(c) - 1) + Q(c)(1 - scQ^{s-1}(c))) + Q(c)(Q^s(c) - 1)] = \\ &= \frac{sQ^{s-2}(c)(1 - Q(c))}{(1 - scQ^{s-1}(c))^3} [c(s-1)(1 - Q^s(c)) - 2Q(c)(1 - scQ^{s-1}(c))] = \\ &= \frac{sQ^{s-2}(c)(1 - Q(c))}{(1 - scQ^{s-1}(c))^3} [2sc + (s-1)Q(c) - (s+1)], \end{aligned}$$

где мы воспользовались уравнением (6) для преобразования выражения в квадратных скобках. Таким образом, получаем формулу (15). Тогда

$$H'_s(c) = (s-1)Q'(c) + 2s, \quad H''_s(c) = (s-1)Q''(c). \quad (16)$$

Так как  $Q(1) = 0$ ,  $Q'(1) = -1$ , то  $H_s(1) = H'_s(1) = (s+1)$  и, проинтегрировав (16), получаем интегральное представление для функции  $H_s$ ,

$$H_s(c) = (s+1)(2-c) + (s-1) \int_c^1 d\xi \int_\xi^1 Q''(\eta) d\eta. \quad (17)$$

Пусть  $c'$  и  $c''$  точки, ближайšie к 1 слева от неё, в которых соответственно  $H_s(c)$  и  $Q''(c)$  обращаются в нуль. Тогда из (17) следует, что  $c' < c''$ , и поэтому на интервале  $(c', c'')$  выполняется  $Q''(c) < 0$ . С другой стороны, из (15) следует, что это невозможно. Таким образом,  $H_s(c) > 0$  и  $Q''(c) > 0$  одновременно на полуинтервале  $(1/s, 1]$ . ■

**Пример.** Рассмотрим отдельно случай  $s = 2$ . Последовательность  $\langle Q_n(c); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$  определяется разностным уравнением (см. (4))

$$Q_{n+1}(c) = 1 - c + cQ_n^2(c)$$

и начальным условием  $Q_0(c) = 1 - c$ . На основе этого рекуррентного соотношения, индукцией по  $n \in \mathbb{N}_+$ , устанавливается неравенство  $Q_n(c) < (2c)^{-1}$ . А именно, так как  $Q_0(c) = 1 - c < (2c)^{-1}$ , ввиду  $c(1-c) \leq 1/4$  при  $c \in [0, 1]$ , используя индукционный шаг, находим

$$Q_{n+1}(c) \leq 1 - c + (4c)^{-1} \leq (2c)^{-1}.$$

Так как при каждом фиксированном  $c \in (0, 1)$  функция  $Q_n(c)$  стремится к вероятности  $Q(c)$ , то  $Q(c) \leq (2c)^{-1}$ .

Таким образом, из двух решений

$$Q_{\pm}(c) = \frac{1}{2c}(1 \pm \sqrt{1/4 - c(1-c)}) = \frac{1}{2c}(1 \pm |1 - 2c|),$$



$\{Q_+(c) = 1, Q_-(c) = (1 - c)/c\}$  уравнения (6) с  $s = 2$ ,

$$Q(c) = 1 - c + cQ^2(c),$$

при  $c > 1/2$  нужно выбрать то, которое подчинено неравенству  $Q(c) < (2c)^{-1}$  при  $c > 1/2$ . Этим свойством обладает только решение  $Q_-(c) = c^{-1}(1 - c)$ . То же самое следует из условия неубывания последовательности  $\langle Q_n(c); n \in \mathbb{N}_+ \rangle$ . Неравенство  $Q_{n+1}(c) \geq Q_n(c)$  даёт

$$cQ_n^2(c) - Q_n(c) + 1 - c \geq 0.$$

Это неравенство может быть удовлетворено только при  $Q_n(c) \leq Q_-(c)$ , либо  $Q_n(c) \geq Q_+(c) = 1$ . Второе невозможно, так как  $Q_n(1) = 0$ .

Непосредственное вычисление

$$Q'(c) = -1/c^2, \quad Q'(1/2 + 0) = -4, \quad Q''(c) = 2/c^3$$

указывает на то, что  $Q(c)$  монотонно убывает и выпукла на  $[1/2, 1]$ .

**5. Заключение.** В статье математически корректно доказаны основные свойства вероятности перколяции  $P(c)$ , как функции от концентрации  $c$ , для однородного бернуллиевского случайного поля (или, в другой терминологии, в задаче узлов) на однородных бесконечных древесных графах. Единственной нерешённой проблемой для графов указанного типа остаётся доказательство того факта, что функции  $P_n(c)$  для любого  $n \in \mathbb{N}$  имеют ровно одну точку перегиба на  $(0, 1)$ , то есть уравнения  $P_n''(c) = 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$  имеют при каждом  $n \in \mathbb{N}$  на  $(0, 1)$  ровно одно решение. Этот факт усматривается в компьютерных экспериментах при значениях  $n$ , меньших 10, однако, общее доказательство его правильности отсутствует.

Все доказательства в этой работе построены на рекуррентном соотношении (4) для вероятностей  $Q_n(c)$ . Его наличие тесно связано с тем, что граф имеет древесную структуру. Для более сложных графов, в которых имеются циклы, соотношения, подобные (4), отсутствуют. Поэтому доказательства общих качественных свойств вероятности перколяции таких, как непрерывность, наличие одной точки  $c_*$ , в которой  $P(c)$  не является аналитической, вогнутость  $P(c)$  при  $c > c_*$  в настоящее время отсутствуют.

## Литература

1. Kesten H. Percolation Theory for Mathematicians / H. Kesten. – Boston: Birkhauser, 1982.
2. Grimmett G. Percolation. 2nd Edition / G. Grimmett. – New York: Springer-Verlag, 1999.
3. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы / Ю.Ю. Тарасевич. – Москва: Эдиториал УРСС, 2002.
4. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы / Б.А. Севастьянов. – М.: Наука, 1971. – 436 с.



## CONTINUITY OF BERNOULLI RANDOM FIELD PERCOLATION PROBABILITY OF UNIFORM TREE GRAPHS

E.S. Antonova Yu.P. Virchenko

Belgorod State University,  
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: [antonova\\_e\\_s@mail.ru](mailto:antonova_e_s@mail.ru)  
Belgorod State University,  
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: [virch@bsu.edu.ru](mailto:virch@bsu.edu.ru)

**Abstract.** The site problem for arbitrary infinite graphs  $\Lambda(V, \Phi)$  in discrete percolation theory is considered. Graphs under consideration are so-called uniform Cayley trees. The percolation probability  $P(c)$  of the uniform Bernoulli random field from the root vertex is studied. It is proved that the function  $P(c)$  is continuous at any branching index  $s \in \{2, 3, 4, \dots\}$  of the tree.

**Key words:** percolation probability, uniform Cayley tree, Bernoulli random field.



УДК 539.2

## ОЦЕНКА ХАРАКТЕРИСТИК КРИСТАЛЛОВ БОЛЬШОЙ ТОЛЩИНЫ С ПОМОЩЬЮ ИЗЛУЧЕНИЯ В НИХ БЫСТРЫХ ЭЛЕКТРОНОВ

Д.А. Бакланов, И.Е. Внуков, Ю.В. Жандармов,  
С.А. Лактионова, Р.А. Шатохин

Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: [vnukov@bsu.edu.ru](mailto:vnukov@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Анализируется зависимость характеристик излучения, возникающего при прохождении через кристалл быстрых электронов, в зависимости от качества внутренней структуры образца. Обсуждаются способы измерения мозаичности кристаллов, размеров микроблоков и посторонних включений по характеристикам регистрируемого излучения.

**Ключевые слова:** быстрый электрон, кристалл, мозаичность, выход излучения, каналирование, микроструктура, микроблок, эксперимент.

### 1. Введение

Наличие упорядоченности расположения атомов в конденсированном веществе приводит к появлению ориентационных и интерференционных эффектов в выходе вторичных процессов, возникающих при прохождении через него быстрых заряженных частиц. К ним, в частности, относятся процессы рассеяния, ионизационных потерь энергии частиц, выхода ядерных реакций, процессы генерации излучения и ряд других. Наличие связи между внутренней структурой мишени и выходом вторичных процессов позволяет ставить вопрос об анализе внутренней структуры мишени по результатам измерений. Например, по выходу рассеянных назад каналированных ионов можно судить о расположении примесей в кристаллической решётке, а по спектрам излучения при каналировании быстрых электронов можно уточнять форму потенциала, плотность электронов, амплитуду тепловых колебаний атомов решетки и тому подобное, см., например, [1,2] и цитируемую там литературу.

В этом же ряду стоит и задача анализа качества внутренней структуры кристаллических образцов, то есть определения наличия в них посторонних включений и блоков мозаичности, распределения микроблоков по углу разориентации относительно основного направления и размерам по характеристикам жесткого электромагнитного излучения, генерируемого при прохождении через них быстрых электронов. К достоинствам этого подхода можно отнести высокую проникающую способность такого излучения и наглядность интерпретации.

В наиболее отчетливой форме эти преимущества реализуются в случае анализа микроструктуры образцов большой толщины, где использование традиционных методов рентгеноструктурного анализа и фотонов с энергией 8-20 кэВ не в состоянии обеспечить контроль качества внутренней структуры. Использование более жёсткого излучения,

например, фотонов с энергией  $\omega=412$  кэВ от распада  $^{198}\text{Au}$  [3] может дать информацию о величине характерного угла мозаичности и распределении блоков мозаики по углу разориентации, но не в состоянии определить однородность их расположения по глубине образца.

Наиболее сложной задачей является определение характерных размеров блоков, от чего часто зависит возможность использования таких кристаллов в прикладных целях. Прямое измерение размеров микроблоков с помощью пучков рентгеновского излучения представляет собой сложную экспериментальную задачу и может быть использовано только для анализа поверхностных слоёв, см. например, [4]. Методы электронной микроскопии позволяют решать эту задачу применительно к тонким поликристаллическим и кристаллическим образцам, если углы разориентации соседних блоков и их размеры больше расходимости и линейных размеров электронного пучка [5]. Если получить тонкие кристаллические мишени без нарушения структуры невозможно, как, например, в случае пластичных металлических кристаллов, использование электронной микроскопии не может дать требуемой информации.

При использовании быстрых электронов варьируя механизм генерации излучения, изменением угла разориентации кристаллографических осей и плоскостей относительно направления электронного пучка, угол наблюдения и энергию регистрируемых фотонов можно получить более качественную информацию о микроструктуре кристаллов большой толщины, чем при применении рентгеновского излучения с фиксированной длиной волны или методами электронной микроскопии. Поэтому задача оценки качества внутренней структуры монокристаллов с помощью излучения, генерируемого при прохождении через них быстрых электронов, и достижимых в этом случае параметров в зависимости от энергии используемых частиц, является важной и актуальной.

## 2. Экспериментальная аппаратура и методика измерений

Большая часть анализируемых методик оценки внутренней микроструктуры кристаллов апробирована на томском синхротроне и микротроне НИИЯФ МГУ или основана на результатах проведенных там исследований [6-9], поэтому принципиальная схема расположения экспериментальной аппаратуры и используемые методики во многом близки к изложенным в цитируемых работах. В настоящий момент в России уже практически нет электронных ускорителей с энергией больше 100 МэВ, на которых проводятся исследования взаимодействия быстрых частиц с твердотельными мишенями, поэтому ограничимся энергиями ускоренных частиц 50-100 МэВ. Схема расположения экспериментальной аппаратуры для ориентации кристалла, измерения характеристик регистрируемого излучения с целью оценки качества микроструктуры кристаллов приведена на рисунке 1. Электронный пучок падает на исследуемый кристалл (Кр), установленный в гониометре с шагом вращения  $\sim 0.1$  мрад, и отворачивается поворотным магнитом (М).

Для ориентации кристалла относительно направления электронного пучка и используется эффект излучения при осевом и плоскостном каналировании [10], приводящий к существенному увеличению интенсивности излучения в низкоэнергетичной части спектра при движении электронов под малыми углами относительно основных кристалло-



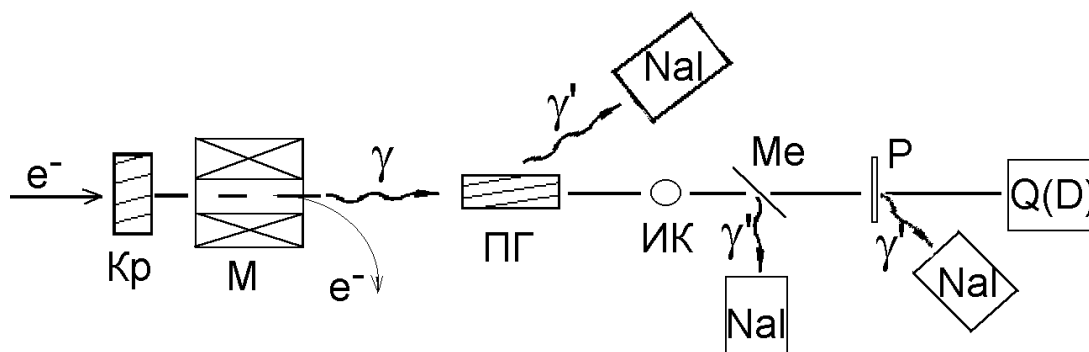


Рис. 1. Схема расположения экспериментальной аппаратуры.

Кр – исследуемый кристалл; М – поворотный магнит; ПГ – кристалл пиролитического графита; ИК – ионизационная камера; NaI – NaI(Tl) спектрометры; Ме – металлическая пластинка; Р – рассеиватель; Q – квантометр; D – дозиметр.

графических направлений. Регистрация совпадения направления движения электронов с осью или плоскостью кристалла (режим осевого или плоскостного каналирования) осуществляется по выходу характеристического рентгеновского излучения из тонкой металлической пластины (Ме) по методике работы [6] или комптоновских фотонов, рассеянных в конверторе (Р), по методике работы [11]. Обе мишени устанавливаются на пучке  $\gamma$ -излучения из кристалла и могут перемещаться поперек направления фотонного пучка для измерения углового распределения мягкой компоненты излучения. Регистрация рассеянного излучения осуществляется с помощью детекторов NaI(Tl), которые могут быть включены как в счётном [11], так и в токовом режиме [6]. Для этих же целей может использоваться тонкостенная ионизационная камера (ИК) [7].

Для выделения излучения в узком спектральном диапазоне и измерения низкочастотной части спектра в присутствии высокоэнергетических фотонов, распространяющихся в том же направлении, используется кристалл-дифракционный спектрометр на основе мозаичного кристалла пиролитического графита (ПГ), который так же может перемещаться в плоскости перпендикулярной направлению электронного пучка для измерения углового распределения излучения [8,9]. Регистрация дифрагированного излучения осуществляется детекторами NaI(Tl) различной толщины, включенными в счётном или токовом режиме в зависимости от решаемой задачи. Контроль режима ускорителя и нормировка получаемых экспериментальных данных осуществляется с помощью детектора интегральной интенсивности излучения в роли которого могут выступать квантометр (Q) или дозиметр (D). Для этой же цели используется датчик тока, имеющийся на каждом работающем ускорителе.

### 3. Экспериментальные методики оценок микроструктуры кристаллов

Как и в случае традиционного рентгеноструктурного анализа наиболее простой задачей является определение наличия мозаичности и оценка её характерного угла  $\sigma_m$ . Исследования ориентационных зависимостей (ОЗ) выхода фотонов когерентного тормозного излучения и излучения при каналировании электронов с энергией 890 МэВ

в мозаичном кристалле пиролитического графита ( $\sigma_m \sim 3.3$  мрад) [12] показали, что наличие мозаичности приводит к уширению ОЗ выхода излучения при каналировании  $\Delta\Theta_{moz} \sim \sqrt{\Delta\Theta_{per}^2 + 4\sigma_m^2}$ , где  $\Delta\Theta_{per}$  и  $\Delta\Theta_{moz}$  ширины ОЗ для совершенного и мозаичного кристаллов.

Вместе с уширением ОЗ каналированного излучения в мозаичных кристаллах наблюдалось подавление выхода жестких фотонов и интегральной интенсивности коллимированного излучения из-за эффекта "квазипреломления" электронного пучка потенциалом плоскости кристалла [13] при совпадении направлений электронного пучка и усредненного направления плоскостей мозаичного кристалла. Для  $\vartheta_c \approx \gamma^{-1}$ , где  $\gamma^{-1}$ -характерный угол излучения, величина подавления была  $\sim 30\%$ . Для угла коллимации излучения  $\vartheta_c \gg \gamma^{-1}$  подавление интегральной интенсивности отсутствовало. Подавление выхода фотонов с энергией 800 МэВ наблюдалось и при пересечении плоскости (110) мозаичного кристалла вольфрама в эксперименте [14]. Эффект становится заметным когда величина  $\sigma_m$  сопоставима с  $\gamma^{-1}$ , что для энергий электронов  $E_e \sim 50-100$  МэВ ограничивает возможности этого способа оценки величины мозаичности кристалла значениями  $\sigma_m \sim 2$  мрад и более.

Более информативные результаты и большую точность можно получить при наличии внутри кристалла моноблока, развернутого на некоторый угол относительно направления плоскостей основного объема кристалла. На рис. 2 приведена ориентационная зависимость выхода рассеянных фотонов из составной мишени, состоящей из двух кристаллов кремния толщиной 0.35 мм и ориентацией  $\langle 110 \rangle$  [15]. Энергия электронов 900 МэВ, угол коллимации излучения  $\vartheta_c = 0.6$  мрад.

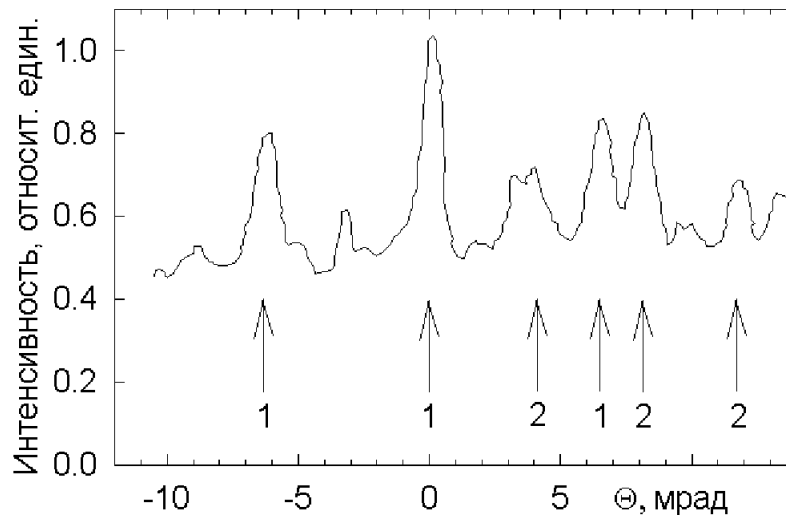


Рис. 2. Ориентационная зависимость выхода каналированного излучения из составной кремниевой мишени для  $E_e = 900$  МэВ и  $\vartheta_c = 0.6$  мрад [15]

Как видно из рисунка, плоскости, принадлежащие каждому из кристаллов, уверенно разделяются. При изменении угла разориентации расстояния между плоскостями разных кристаллов меняются неодинаково, что позволило в эксперименте [15] сориенти-

ровать вдоль направления электронного пучка ось каждого из кристаллов. С помощью таких же измерений можно оценить размеры и положение моноблока, расположенного внутри кристаллической мишени и развернутого относительно остальной части кристалла, если его размеры достаточно велики ( $\sim 10\text{-}20\%$  от полной толщины мишени).

Известно, см., например, [1], что быстрая частица может быть захвачена в режим каналирования как при влёте в кристалл, так и внутри него вследствие многократного рассеяния в объёме мишени. В этом случае принято говорить о реканалировании или объёмном захвате в режим каналирования. В случае положительных заряженных частиц этот эффект уже давно используется для вывода части "гало" пучка из ускорителя для проведения тестовых измерений и очистки пучка. Этот же эффект наблюдается и для быстрых электронов. На рис. 3а приведены результаты исследования зависимости выхода излучения при плоскостном (110) каналировании электронов с энергией 900 МэВ в кристалле алмаза толщиной 10 мм от угла наблюдения [7] (●, плавные кривые проведены для удобства восприятия).

Измерения проведены с помощью тонкостенной прутковой ионизационной камеры. Угловой захват камеры  $\Delta\theta_h=0.6$  мрад,  $\Delta\theta_v=28$  мрад, в горизонтальной и вертикальной плоскости, соответственно. Ось камеры была параллельна плоскости (110) с точностью не хуже, чем 1-2 градуса. Угол разориентации оси  $\langle 100 \rangle$  был  $\sim 40$  мрад, то есть исследовалось только излучение при плоскостном каналировании. Из рисунков 3а и 3б видно, что при изменении угла наблюдения положение максимума ОЗ изменяется по линейному закону  $\Theta = \theta_h$ , то есть он наблюдается когда плоскость направлена на детектор. Здесь  $\Theta$  – положение максимума в ОЗ, а  $\theta_h$  – угол расположения камеры, отсчитываемый от направления электронного пучка, падающего на кристалл.

Амплитуда максимума в ОЗ пропорциональна числу электронов, рассеянных на угол  $\theta_h \pm \Delta\theta_h/2$  и генерирующих фотоны посредством механизмов излучения при каналировании и так называемого надбарьерного излучения [16]. На рис. 3в (кривая) приведены результаты расчёта вероятности для электрона иметь заданный горизонтальный угол внутри кристалла вследствие многократного рассеяния. В расчёте предполагалась, что многократное рассеяние электронов в кристалле не отличается от рассеяния в аморфной (поликристаллической) мишени с такой же плотностью и толщиной и описывается теорией Мольера [17]. Точками показаны экспериментальные амплитуды максимумов в ОЗ на рис. 3а. Из-за относительного характера измерений экспериментальные данные и результаты расчёта совмещены с помощью масштабного множителя. Как показано в [7] такая же информация может быть получена и из угловых распределений, измеряемых путем перемещения камеры перпендикулярно направлению пучка электронов.

Как видно из рис. 3в, для всех углов наблюдения, кроме нулевого, экспериментальные данные и результаты расчёта практически совпадают. Отличие для нулевого угла наблюдения обусловлены тем, что в этом случае вклад в регистрируемый выход излучения дают не только электроны, рассеянные в заданный телесный угол внутри кристалла и генерирующие излучение при каналировании и надбарьерное излучение (○), но и частицы, захваченные в режим каналирования при влете в кристалл.

Хорошее согласие результатов измерений с расчётом, полученное в эксперименте [7], в совокупности с возможностью уверенного выделения блока достаточно больших раз-

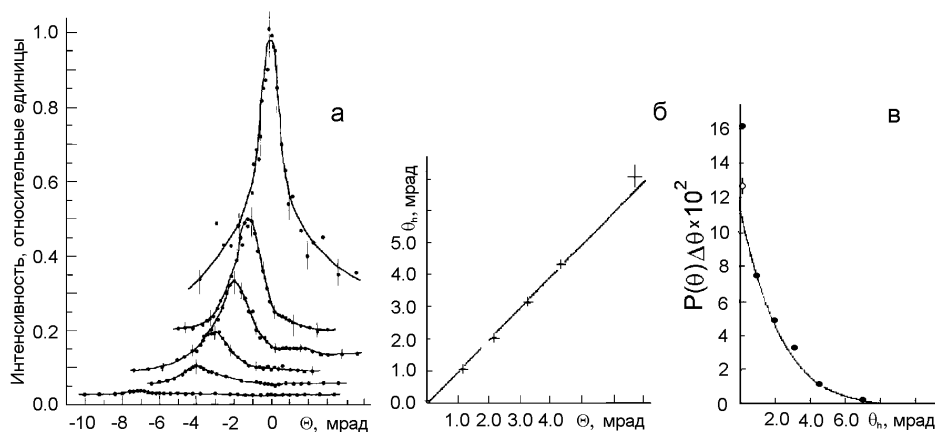


Рис. 3. Зависимость выхода излучения при плоскостном (110) каналировании электронов в кристалле алмаза от угла наблюдения [7]

меров по характеристикам детектируемого излучения, продемонстрированной в эксперименте [15], позволяют ставить вопрос о регистрации блоков, расположенных внутри кристалла. На рис. 4а приведена возможная схема реализации такого эксперимента. Мягкая компонента излучения регистрируется двумя детекторами. Один из них ( $D_1$ ) регистрирует излучение, испущенное вдоль направления электронного пучка, и служит для отсчета углов разориентации плоскости относительно направления электронного пучка. Второй ( $D_2$ ) используется для регистрации излучения, обусловленного объёмным захватом электронов в режим плоскостного каналирования в глубине кристалла, и может перемещаться в плоскости, перпендикулярной направлению пучка электронов.

На рис. 4б приведены результаты расчёта ориентационных зависимостей выхода излучения, регистрируемого детектором  $D_2$ , для такой постановки эксперимента при наличии внутри кристалла вольфрама толщиной 1 мм блока толщиной 0.2 мм, развернутого относительно остальной части кристалла на угол 2 мрад. Глубина залегания блока 0.6 мм. Энергия электронов 900 МэВ. Угловой захват детектора  $D_2$  в горизонтальной плоскости равен 0.6 мрад как и в эксперименте [7], а в вертикальном направлении не ничем ограничен. Методика расчёта совпадает с использованной в цитируемой работе. Зависимости 1 – 0З для нулевого угла расположения детектора  $D_2$  и совершенного кристалла. Зависимости 2-7 соответствуют следующим углам расположения детектора  $D_2$  для составного кристалла: 2 – 0 мрад; 3 – 4 мрад; 4 – 10 мрад; 5 – 20 мрад, 6 – 30 мрад и 7 – 40 мрад.

На рис. 4б приведены зависимости только когерентной компоненты излучения чувствительной к ориентации кристалла. Основным механизмом, создающим фоновую подложку, является тормозное излучение. В мишенях большой толщины угловое распределение результирующего излучения определяется многократным рассеянием электронов как и вероятность захвата в режим плоскостного каналирования, поэтому отношение пик/подложка слабо зависит от угла наблюдения (см. рис. 3а).

Из рисунка видно, что наличие моноблока такого размера приводит к появлению до-

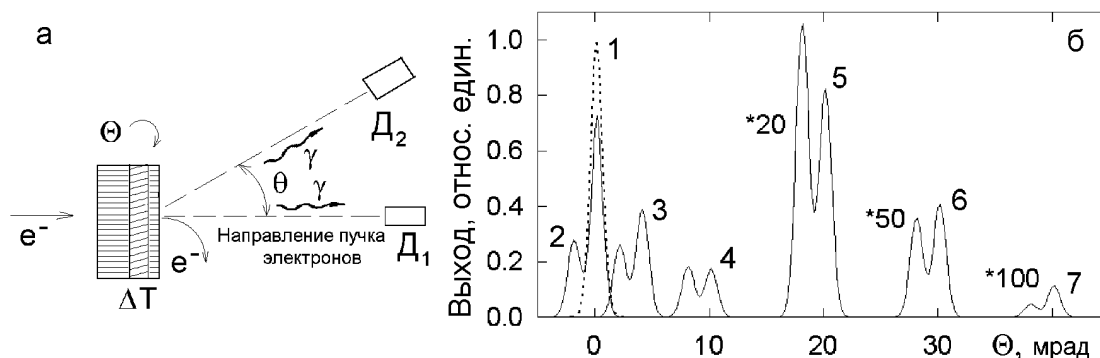


Рис. 4. Схема эксперимента и расчетные ориентационные зависимости выхода излучения при плоскостном (100) каналировании электронов в кристалле вольфрама, содержащем моноблок толщиной 0.2 мм, для нескольких углов наблюдения

полнительного пика, отстоящего от пика для основной части кристалла на угол разориентации этого моноблока. Для нулевого угла наблюдения амплитуда дополнительного пика существенно меньше, чем амплитуда основного пика. С увеличением угла наблюдения соотношение между амплитудами меняется. Для угла расположения детектора  $D_2 \sim 20$  мрад пик, обусловленный наличием моноблока внутри кристалла, больше, чем пик, связанный с излучением электронов в остальной части кристалла. При дальнейшем увеличении угла наблюдения, что соответствует большим толщинам, амплитуда дополнительного пика опять становится меньше, чем основного пика.

Амплитуда дополнительного пика зависит от размеров блока, глубины его залегания и угла наблюдения, поэтому такие измерения позволяют определить наличие моноблока, оценить его положение в кристалле и размеры. Расчёт выполнен для энергии электронов 900 МэВ. Уменьшение энергии электронов до 50-100 МэВ приведет к увеличению многократного рассеяния и более плавному уменьшению амплитуд основного и дополнительного пиков с ростом угла наблюдения. В связи с уменьшением энергии фотонов излучения при каналировании и интенсивности когерентного излучения с изменением энергии электронов потребуется детектор чувствительный к рентгеновской компоненте спектра  $\sim 30$ -100 кэВ. При выполнении этого условия описанная методика работоспособна и для этих энергий электронов.

В связи с уменьшением энергии электронов увеличатся характерный угол излучения и ширина ориентационных зависимостей, поэтому для сохранения чувствительности метода будет необходимо более широко использовать методы компьютерной обработки результатов измерений. Как известно, при наличии достаточной статистики положение максимума любого распределения можно определить с точностью существенно лучшей, чем ширина канала. Для увеличения относительного вклада дополнительного пика и улучшения чувствительности метода можно будет вводить ограничение по вертикальному углу захвата детектора. Методика позволяет определить и наличие посторонних включений, например, области аморфизации внутри кристалла. В этом случае зависимость амплитуды или площади пика в ОЗ от угла наблюдения уже не будет соответство-

вать расчётной. По области углов, где наблюдается отклонение результатов измерений от предсказаний расчёта можно сделать вывод о глубине и ширине этого включения.

Для проверки отсутствия взаимной разориентации блоков на противоположных поверхностях кристаллической мишени можно воспользоваться эффектом осевого каналирования и зависимостью сечения поглощения от энергии фотонов. В эксперименте [8] с помощью кристалл-дифракционного спектрометра на основе мозаичного кристалла пиролитического графита показано, что максимум в ОЗ выхода рентгеновских фотонов фиксированной энергии, генерируемых электронами с энергией 500 МэВ в кристалле кремния толщиной 0.35 мм наблюдается при направлении оси кристалла на детектор. Амплитуда максимума, как и в случае плоскостного каналирования, определяется процессом многократного рассеяния электронов в кристалле и зависит от угла наблюдения.

Схема эксперимента по контролю взаимной разориентации моноблоков на противоположных гранях кристалла практически совпадает с приведенной на рис. 4б. Детектор  $D_1$  установлен на оси электронного пучка и регистрирует жесткое излучение, возникшее за счет эффекта осевого каналирования на входной грани мишени. По мере прохождения электронного пучка через кристалл, его угловое распределение расплывается, поэтому вклад излучения, обусловленного объёмным захватом электронов в режим осевого каналирования и зависящий от внутренней структуры кристалла, в показаниях этого детектора достаточно мал. В качестве такого детектора может быть использован любой детектор, показанный на рис. 1.

В качестве детектора  $D_2$  используется кристалл-дифракционный спектрометр, настроенный на энергию фотонов 15-20 кэВ или ниже в зависимости от вещества и толщины исследуемого кристалла. В этом случае все регистрируемое излучение рождается около выходной грани и несёт информацию только структуре мишени в этой области. Если между противоположными гранями кристалла есть угол взаимной разориентации, то положение максимума в ОЗ выхода рентгеновского излучения, регистрируемого детектором  $D_2$ , не будет совпадать с углом наблюдения. Для энергии электронов 50-100 МэВ характерная энергия фотонов излучения при осевом каналировании 100-300 кэВ, поэтому предлагаемый способ работоспособен и для этих энергий частиц. Ожидаемая точность способа порядка 1 мрад или несколько лучше, поскольку в эксперименте измеряются распределения по углам разориентации.

Наиболее привлекательной и интересной представляется возможность оценки средних размеров блоков в мозаичных кристаллах по характеристикам регистрируемого рентгеновского излучения. На рис. 5а приведены ориентационные зависимости выхода рентгеновского излучения с энергиями 67 кэВ и 96 кэВ, полученные в эксперименте [9] по поиску и исследованию параметрического рентгеновского излучения под малыми углами к скорости частицы в кристалле вольфрама, или, как его иногда называют, ПРИ вперед. Энергия электронов 500 МэВ. Измерения выполнены с помощью кристалл-дифракционных спектрометров на основе мозаичных кристаллов пиролитического графита и тонких NaI(Tl) детекторов. Разрешение спектрометров  $\Delta\omega/\omega \sim 0.5-1\%$  определялось размерами кристаллов графита, энергией регистрируемых фотонов и углом коллимации дифрагированного излучения. Характеристики экспериментальной аппаратуры и методика измерений приведены в работах [8,9].

Положение минимумов в ОЗ соответствовало кинематическим условиям дифракции для фотонов, направленных вдоль оси экспериментальной установки, с погрешностью не хуже процента. Например, для  $\omega=67$  кэВ расчётные положения минимумов для отражений  $(10\bar{1})$ ,  $(01\bar{1})$  и  $(11\bar{2})$  – 46.6 мрад, 49.9 мрад и 72.2 мрад. Тогда как измеренные значения – 46.3 мрад, 49.5 мрад и 71.9 мрад. Другими словами, наличие провалов в ОЗ выхода жёстких фотонов обусловлено дифракцией тормозного излучения внутри кристалла. Глубина минимумов менялась от 15-18% для  $\omega=67$  кэВ, до  $\sim 10\%$  для  $\omega=96$  кэВ. Типичное значение полной ширины минимума  $\Delta\Theta \sim 1.5 - 2.5$  мрад.

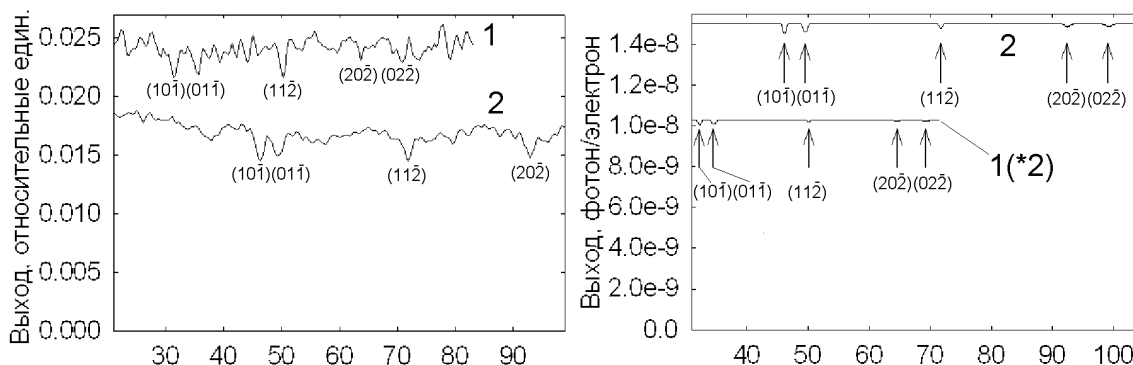


Рис. 5. Ориентационные зависимости выхода рентгеновского излучения из кристалла вольфрама толщиной 0.41 мм: 1 –  $\omega=96$  кэВ; 2 –  $\omega=67$  кэВ

На рис. 5б приведены расчётные ориентационные зависимости выхода рентгеновского излучения в направлении прямо-вперед для условий эксперимента [9] с учётом эффективности спектрометров и вклада переходного излучения с выходной грани кристалла для диапазона углов разориентации кристалла 30-100 мрад и энергий фотонов  $\omega=96$  кэВ и  $\omega=67$  кэВ, соответственно зависимости 1-2. Методика приближенного учета вклада дифракционного подавления выхода излучения в совершенных кристаллах приведена в [18].

Из рисунка видно, что глубина провалов в расчётных ориентационных зависимостях для плоскостей типа  $(110)$  и энергий фотонов 67 кэВ и 96 кэВ, соответственно  $\sim 2.5\%$  и  $\sim 1.5\%$  почти в пять раз меньше экспериментальных  $\sim 15\%$  и  $\sim 10\%$ . Ширина расчётных зависимостей примерно в 1.5-2 раза меньше экспериментальных. Положение уверенно проявляющихся провалов хорошо согласуется с расчётом в том числе и для более слабых отражающих плоскостей  $(112)$  и  $(220)$ . Как и для более сильных плоскостей, глубина экспериментальных провалов для них в 5-7 раз больше, чем расчётных.

Известно, что мозаичные кристаллы лучше отражают рентгеновское излучение, чем совершенные [19], что может объяснить наличие относительно глубоких провалов в измеренных ориентационных зависимостях. С другой стороны, в анализируемом эксперименте впервые наблюдался динамический эффект в излучении быстрых электронов в кристаллах, что по умолчанию предполагает совершенство структуры кристалла. Выходом из сложившейся дилеммы является учёт того факта, что в мозаичных кристаллах так же могут проявляться динамические эффекты в отражении рентгеновского излу-



чения [19]. Для этого необходимо, чтобы размер блоков с совершенной структурой был больше длины первичной экстинкции (для наших условий  $\sim 2-3 \mu\text{м}$ ).

При выполнении условия и  $l_{ex} < l < l_a$ , где  $l$  - длина блока, а  $l_{ex}$  и  $l_a$  длины первичной экстинкции и поглощения фотонов, эффективность отражения рентгеновских лучей мозаичным кристаллом больше, чем у совершенного кристалла [19], что и наблюдалось в эксперименте [9]. В качестве подтверждения этого вывода следует отметить наличие поверхностной мозаичности  $\sigma_m \approx 0.2$  мрад у этого кристалла. Стандартные методы рентгеноструктурного анализа не в состоянии определить качество внутренней структуры образцов такой толщины и состава. Поэтому можно только предполагать, что и внутренняя часть кристалла обладает примерно такой же мозаичностью.

Наличие отдельных микроблоков, развернутых на небольшой угол  $\Theta > \Delta\theta$  относительно среднего направления, увеличивает вероятность отражения фотонов с энергией, на которую настроен спектрометр, что приводит к увеличению глубины провала и его ширины. В первом приближении можно считать, что наличие мозаичности приводит к эффективному увеличению ширины столика Дарвина [19] с  $\Delta\theta \sim 0.03$  мрад до  $\Delta\theta_{eff} \approx \Delta\theta + 2\sigma_m \sim 0.5$  мрад, что эквивалентно уширению спектра дифрагированного излучения  $\Delta\omega$  с 40-70 эВ до  $\sim 0.4 - 1.2$  кэВ в зависимости от энергии регистрируемого излучения. Эта величина сопоставима с энергетическим разрешением спектрометра, поэтому ширина провалов в экспериментальных ОЗ выхода излучения в 1.5-2 раза больше, чем в расчётных.

В качестве оценки величины вклада эффекта дифракционных потерь в выход регистрируемого излучения можно взять отношение длины поглощения к средней длине микроблока. Исходя из соотношения глубин экспериментальных и расчётных провалов для энергий фотонов  $\omega=67$  кэВ ( $\sim 5.4$ ) и значения длины поглощения фотонов с этой энергией  $l_a \approx 183 \mu\text{м}$  средний размер блоков в использованном в этом эксперименте кристалле вольфрама  $\sim 30 \mu\text{м}$ . Примерно такие же значения среднего размера блоков получаются и из сопоставления результатов измерений и расчётов и для энергии фотонов 96 кэВ.

Поскольку измеренное значение поверхностной мозаичности  $\sigma_m \approx 0.2$  мрад сопоставимо с шириной столика Дарвина  $\Delta\theta \sim 0.03$  мрад, должен наблюдаться эффект переотражения дифрагированного излучения, приводящий к уменьшению глубины провала. Поэтому реальное число блоков, обусловившее экспериментально зарегистрированное подавление выхода тормозного излучения, больше, а средняя длина блоков, соответственно, меньше. Об этом, в частности, свидетельствует тот факт, что для слабых плоскостей (112) и (220), для которых вероятность переотражения существенно меньше, отношение глубин провалов в экспериментальных и расчётных зависимостях увеличивается до  $\sim 8-10$ , что соответствует длине блока  $\sim 20 \mu\text{м}$ .

Такие исследования можно проводить и на ускорителях средних энергий ( $E_0 \sim 30-50$  МэВ). Их преимуществом перед ускорителями на большие энергии является отсутствие других механизмов излучения. Это позволяет использовать и меньшие энергии фотонов, что позволит более точно определять размеры микроблоков. В эксперименте [9] в области энергий фотонов 40 кэВ вместо провала наблюдался пик, обусловленный механизмом ПРИ вперед. Не исключено, что и в измерениях для  $\omega=67$  кэВ тоже на-





блюдался вклад этого механизма излучения, поэтому глубина провала, обусловленного эффекта дифракционных потерь излучения, на самом деле больше, а средний размер блоков, соответственно, меньше. Основные требования – наличие гониометра с шагом вращения не более 0.1 мрад и достаточно больших баз, что бы можно было реализовать методику выделения излучения с фиксированной энергией с разрешением  $\Delta\omega/\omega \leq 0.5\%$  с помощью кристалл-дифракционного спектрометра на основе совершенного или мозаичного кристалла. Последнее, по-видимому, даже предпочтительнее, поскольку позволяет получить лучшее соотношение сигнал/фон при почти одинаковом энергетическом разрешении.

Одним из преимуществ предлагаемого подхода перед традиционными состоит в том, что этот метод работоспособен для толщин кристаллов, намного превышающих длину поглощения фотонов характеристического рентгеновского излучения материалов анода рентгеновских трубок, используемых в рентгеноструктурном анализе. С его помощью можно увидеть взаимную разориентацию блоков в объемном образце на угол  $\sim 10^{-5}$  и меньше, что практически не возможно сделать с помощью традиционных методов [5].

### Заключение

Результаты проведенного анализа способов оценки внутренней микроструктуры кристаллов большой толщины по характеристиками излучения электронов с энергией 50-100 МэВ в таких образцах кратко можно сформулировать следующим образом:

- 1) Использование излучения быстрых электронов в кристаллах позволяет определить наличие мозаичности исследуемого образца и сделать оценку её характерного угла  $\sigma_m$ .
- 2) Измерение угловых распределений или ориентационных зависимостей выхода мягкой компоненты когерентного излучения быстрых электронов в кристаллах позволяет определить наличие в них развернутых моноблоков, посторонних включений и взаимного разворота плоскостей на входной и выходной гранях.
- 3) Измерение дифракционного подавления выхода рентгеновского излучения с фиксированной энергией быстрых электронов в мозаичных кристаллах и его сопоставления с расчётным или измеренным для совершенного кристалла позволяет определить характерные размеры микроблоков в таких кристаллах.

Авторы выражают благодарность соавторам работ [6-9,12,14,15] за участие в разработке и реализации методик, использованных в процессе исследований, и помощь при проведении измерений. Работа выполнена при частичной поддержке ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России", ГК 16.740.11.0147 от 02.09.2010 и программы внутренних грантов БелГУ.

### Литература

1. Рябов В.А. Эффект каналирования / В.А. Рябов. – М.: Энергоатомиздат, 1994. – 240 с.
2. Datz S., Berman B.L., Danling B.A., Hynes M.V., Park H., Kephart J.O., Klein R.K. and Pantell R.H. On the dependence of electron planar channeling radiation upon lattice vibration amplitude // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B. – 1986. – 13. – P.19-22.



3. Курбаков А.И., Трунов В.А., Дмитриев Р.П. и др. Гамма-дифракционные исследования структурного совершенства монокристаллов. Метод и аппаратура // Препринт ЛИЯФ. – N 1307, июль 1987 г., 59 с.
4. Ohler M., Baruchel J., Moore A.W., Galez Ph., Freund A. Direct observation of mosaic blocks in highly oriented pyrolytic graphite // Nucl. Instr. and Meth. in Phys. Res. B. – 1997. – 129. – P.257-260.
5. Горелик С.С., Скаков Ю.А., Расторгуев Л.Н. Рентгенографический и электронно-оптический анализ / С.С. Горелик. – М.: МИСИС, 2002. – 360 с.
6. Бакланов Д.А., Внуков И.Е., Гришин В.К., Жандармов Ю.В., Ермаков А.Н., Шатохин Р.А. Предложение эксперимента по поиску и исследованию дифрагированного излучения каналированных электронов // Поверхность, рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. – 2010. – 3. – С.26-36.
7. Амосов К.Ю., Андреяшкин М.Ю., Внуков И.Е., Калинин Б.Н., Науменко Г.А., Потылицын А.П., Сарычев В.П. Исследование угловых распределений мягкой компоненты релятивистских электронов вблизи плоскостной ориентации монокристаллов большой толщины // Известия ВУЗов, "Физика". – 1991. – 6. – С.70-80.
8. Внуков И.Е., Калинин Б.Н., Кирьяков А.А., Науменко Г.А., Падалко Д.В., Потылицын А.П. Мягкая компонента излучения каналированных электронов в кристалле кремния // Известия ВУЗов "Физика". – 2001. – 44; 3. – С.71-80.
9. Алейник А.Н., Балдин А.Н., Богомазова Е.А., Внуков И.Е., Калинин Б.Н., Кубанкин А.С., Насонов Н.Н., Науменко Г.А., Потылицын А.П., Шарафутдинов А.Ф. Экспериментальное обнаружение параметрического рентгеновского излучения вдоль скорости релятивистских электронов, движущихся в кристалле вольфрама // Письма в ЖЭТФ. – 2004. – 80;6. – С.446-451.
10. Кумахов М.А. Излучение каналированных частиц в кристаллах / М.А. Кумахов. – М.: Энергоатомиздат, 1986. – 160 с.
11. Калинин Б.Н., Коновалова Е.И., Плешков Г.А., Потылицын А.П., Тарасов В.М., Томчаков В.К., Хакбердыев И. Автоматизированная система ориентирования монокристаллических мишеней в электронном ускорителе // ПТЭ. – 1985. – 3. – С.31-35.
12. Amosov S.Yu., Kalinin B.N., Naumenko G.A., Potylitsin A.P., Verzilov V.A. and Vnukov I.E. Experimental Investigation of Coherent Bremsstrahlung in a Mosaic Pyrolytic Graphite Crystal // Nuclear Instruments and Methods in Physics Research B. – 1996. – 119. – P.103-107.
13. Ермак В.П., Касьян С.В., Кохнюк К.С., Нога В.И., Санин В.М. Квазипреломление электронного пучка монокристаллом кремния // ВАНиТ, сер. ЯФИ. – 1990. – 3(11). – С.18-21.
14. Внуков И.Е., Воробьев С.А., Забаев В.Н., Калинин Б.Н., Курков А.А., Потылицын А.П. Подавление выхода жесткого гамма-излучения в конус  $1/\gamma$  при прохождении электронов вблизи кристаллографической оси или плоскости // ЖТФ. – 1984. – 54;7. – С.1399-1402.



15. Amosov K.Yu., Vnukov I.E., Kalinin B.N. et al. Investigation of thick crystal mosaic structure // The Fourth All-Union Conference on Interaction of Radiation with solids, Moscow, 1990. – P.123.
16. Ахиезер А.И., Шульга Н.Ф. Электродинамика высоких энергий в веществе / А.И. Ахиезер. – М.: Наука, 1993. – 344 с.
17. Bethe H.A. Moliere's theory of multiple scattering // Phys. Rev. – 1953. – 89;6. – P.1256-1266.
18. Бакланов Д.А., Балдин А.Н., Внуков И.Е., Нечаенко Д.А., Шатохин Р.А. Соотношение вкладов дифрагированного тормозного излучения и параметрического рентгеновского излучения в совершенных кристаллах // Вестник Харьковского национального университета имени В.Н. Каразина. – 2007. – 763, сер.физ. "Ядра, частицы, поля". – 1;33. – С.41-56.
19. Джеймс Р. Оптические принципы дифракции рентгеновских лучей / Р. Джеймс М.: Изд.Иностр.Лит.,1950. – 464 с.

## CHARACTERISTICS ESTIMATE OF THE LARGE THICKNESS CRYSTALS BY MEANS OF FAST ELECTRONS IRRADIATION

D.A. Baklanov, I.E. Vnukov, Yu.V. Zhandarmov,  
S.A. Laktionova, R.A. Shatokhin

Belgorod State University,  
Studencheskaya St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: [vnukov@bsu.edu.ru](mailto:vnukov@bsu.edu.ru)

**Abstract.** Characteristics of the irradiation emitted by the transmission of fast electrons through the crystal is analyzed. They depend on the internal structure quality. Measuring methods of the crystal mosaicity, microblock sizes and external inclusions by means of characteristics of detected radiation are discussed.

**Key words:** fast electron, crystal, mosaicity, radiation yield, channeling, microstructure, bulk, experiment.



УДК 532.546

## МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ ТЕЧЕНИЙ С НЕИЗВЕСТНЫМИ ГРАНИЦАМИ

Э.Н. Береславский, Л.А. Александрова, Е.В. Пестерев

Государственный университет гражданской авиации,  
Санкт-Петербург, 197349, Россия, e-mail: [eduber@mail.ru](mailto:eduber@mail.ru)

**Аннотация.** В рамках теории двумерной стационарной фильтрации несжимаемой жидкости по закону Дарси в однородном изотропном грунте исследуются некоторые фильтрационные течения под гидротехническим сооружением с участками постоянной скорости обтекания и под шпунтом Жуковского через орошаемый почвенный слой с нижележащим сильнопроницаемым напорным горизонтом. Решение соответствующих многопараметрических смешанных краевых задач теории аналитических функций осуществляется с помощью метода конформных отображений областей специального вида. Приводятся результаты численных расчетов и дается подробный гидродинамический анализ влияния определяющих физических параметров моделей на картину течений.

**Ключевые слова:** фильтрация, грунтовые воды, плотина, шпунт, область комплексной скорости, конформные отображения.

### 1. Введение

В работе [1] изучались две математические модели течений под заглубленной плотиной и под шпунтом Жуковского. В первой задаче рассматривалось моделирование плавного подземного контура гидротехнического сооружения. При этом определялось очертание подстилающего водопроницаемое основание криволинейного водоупора, характеризующегося постоянством скорости обтекания. В настоящей статье исследуется случай, когда водоупор с подобными свойствами имеет более сложную конфигурацию и состоит из горизонтального и двух криволинейных участков. Следует отметить, что введение подобных криволинейных участков позволяет избежать рассмотрения нереальных полубесконечных и бесконечных областей, что особенно важно при разработке приближенных и численных методов (конечных элементов, граничных интегральных уравнений и т. п.). Во второй задаче [1] исследовалось течение при обтекании шпунта Жуковского через орошаемый почвенный слой в нижележащий хорошо проницаемый горизонтальный слой, не содержащий напорных грунтовых вод (фильтрация без напора или так называемая свободная фильтрация), левая полубесконечная часть кровли которого моделировалась непроницаемым включением (твёрдая порода, водоупор). В настоящей работе рассматривается наиболее часто встречающийся в теории фильтрации и мелиорации случай, когда нижележащий сильнопроницаемый пласт содержит напорные грунтовые воды (так называемая фильтрация с подпором).

Для изучения этих моделей формулируются и с помощью конформных отображений областей специального вида решаются смешанные краевые задачи теории аналитических функций. Дается конструктивное решение задач, получены точные аналитические

представления для характерных размеров схем течения. Приводятся результаты численных расчетов и дается гидродинамический анализ влияния основных физических параметров моделей на размеры областей движения. Отмечаются предельные случаи, связанные с отсутствием горизонтального участка водопора в первой схеме и подпора в нижележащем сильнопроницаемом слое во второй, исследованные ранее в [1].

## 2. Моделирование подземного контура гидротехнического сооружения с участками постоянной скорости обтекания

**2.1. Постановка задачи и ее решение.** Рассматривается плоская установившаяся фильтрация (по закону Дарси с известным коэффициентом фильтрации  $\kappa = const$ ) несжимаемой жидкости в однородном и изотропном грунте под водонепроницаемым подземным контуром заглубленной плотины  $ABCC_1B_1A_1$  (рис. 1).

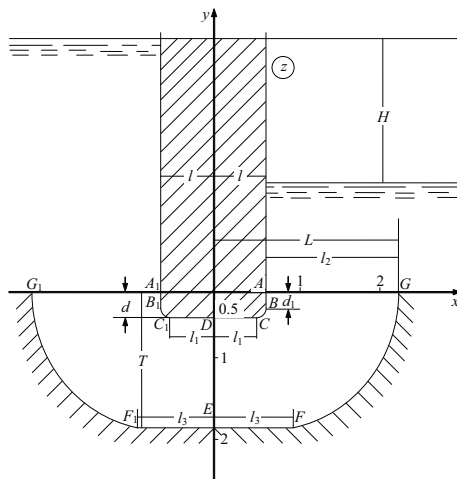


Рис. 1. Подземный контур заглубленной прямоугольной плотины, рассчитанный при  $H = 2$ ,  $v_0 = 1$ ,  $T = 1.934$ ,  $Q = 1.14$ ,  $\Delta l = 0.308$  и  $\Delta d = 0.295$

Область течения ограничена снизу водопором  $G_1G$ , состоящим из двух криволинейных участков  $G_1F_1$  и  $GF$ , а также, в отличие от рассмотренного ранее случая [1], горизонтального участка  $F_1EF$ ; на них, как и на участках подземного контура гидротехнического сооружения  $BC$  и  $B_1C_1$ , величина скорости обтекания постоянна.

Если ввести комплексный потенциал движения  $\omega = \varphi + i\psi$  (рис. 2) и комплексную координату  $z = x + iy$ , отнесенные соответственно к  $\kappa H$  и  $H$ , где  $H$  – действующий на сооружение напор, то задача состоит в определении положения кривых  $BC$ ,  $B_1C_1$ ,  $G_1F_1$  и  $GF$  при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned}
 A_1G_1 &: y = 0, \varphi = -0.5H; & A_1B_1 &: x = -l, \psi = Q; \\
 C_1DC &: y = -d, \psi = Q; & AB &: x = l, \psi = Q; \\
 AG &: y = 0, \varphi = 0.5H; & G_1F_1, FG &: \psi = 0; \\
 B_1C_1, BC &: |w| = v_0; & G_1F_1, FG &: |w| = u_0; \\
 F_1EF &: y = -T, \psi = 0,
 \end{aligned} \tag{1}$$

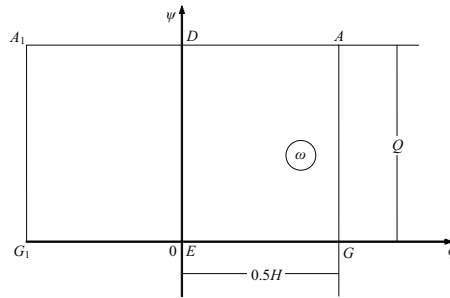


Рис. 2. Область комплексного потенциала течения  $\omega$

таким образом, чтобы скорость фильтрации вдоль криволинейных участков подземного контура плотины  $BC$  и  $B_1C_1$ , а также горизонтального  $FEF_1$  и криволинейных участков  $G_1F_1$  и  $GF$  водоупора имела постоянные значения  $v_0$  (заданное) и  $u_0$  (искомое) соответственно ( $0 \leq u_0 < v_0$ ).

Обратимся к области комплексной скорости  $w$ , которая изображена на рис. 3,а. Эта область, содержащая прямые углы и разрезы, принадлежит классу многоугольников в полярных сетках [4], и отличается от таковой для случая, рассмотренного в [1], лишь горизонтальным разрезом  $F_1EF$  вдоль вещественной полуоси плоскости  $w$ , что позволяет воспользоваться принципом симметрии Римана-Шварца, который приводит к существенному сокращению неизвестных констант конформного отображения.

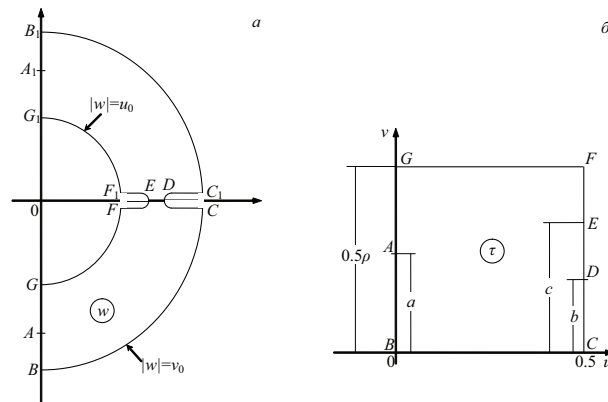


Рис. 3. Области: а) комплексной скорости  $w$ ; б) вспомогательной параметрической переменной  $\tau$

Поэтому, так же как в [1], принимая в качестве канонической области прямоугольник (рис. 3,б) и, учитывая полную симметрию на плоскостях  $z$ ,  $\omega$  и  $w$ , ограничимся рассмотрением области движения  $ABCDEF$  и соответствующих ей одноименных областей на плоскостях  $\omega$  и  $w$ . Тогда, принимая во внимание совпадение области комплексной скорости с таковой для случая [1], имеем

$$w(\tau) = v_0 \exp(\tau - 0.5)\pi i, \tag{2}$$



откуда определяется физический параметр  $u_0 = v_0 \exp(-0.5\pi\rho)$ .

Конформное отображение прямоугольника вспомогательной переменной  $\tau$  на область комплексного потенциала  $\omega$  дается формулой

$$\omega = \frac{0.5}{K(k)} F \left[ \arcsin \frac{\lambda}{n} \sqrt{\frac{1 - n^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)}{1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)}}, m \right]. \quad (3)$$

В этой формуле  $F(\varphi, m)$  – эллиптический интеграл первого рода при модуле

$$\begin{aligned} m &= k[(1 - k'^2 \alpha^2 \beta^2)(1 - k'^2 \gamma^2)/(1 - k'^2 \beta^2)(1 - k'^2 \alpha^2 \gamma^2)]^{1/2}, \\ \lambda &= (1 - k'^2 \beta^2)^{1/2}, \quad n = (1 - k'^2 \gamma^2)^{1/2}, \\ \alpha &= \operatorname{sn}(2Ka, k'), \quad \beta = \operatorname{sn}(2Kb, k'), \quad \gamma = \operatorname{sn}(2Kc, k'). \end{aligned}$$

При этом должно выполняться условие

$$\rho(m) = \frac{K'(m)}{K(m)} = \frac{2Q}{H}, \quad (4)$$

связывающее физические параметры  $Q$  и  $H$ , которое служит для определения модуля  $k$ .

Принимая во внимание соотношения (2), (3) и  $w = d\omega/dz$ , и поступая аналогично [1], придем к зависимостям

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} &= -\frac{Mf(\tau)}{\Delta(\tau)}; \quad \frac{dz}{d\tau} = -\frac{Mf(\tau) \exp((0.5 - \tau)\pi i)}{\nu_0 \Delta(\tau)}; \\ f(\tau) &= \operatorname{sn}(2K\tau, k) \operatorname{cn}(2K\tau, k) \operatorname{dn}(2K\tau, k); \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \Delta(\tau) &= ([1 - \lambda^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)][1 - n^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)] \cdot \\ &\quad \cdot [\alpha^2 + (1 - \alpha^2) \operatorname{sn}^2(2K\tau, k)])^{1/2}, \end{aligned}$$

где  $M > 0$  – масштабная постоянная моделирования. Запись представлений (5) для разных участков границы области  $\tau$  с последующим интегрированием по всему контуру вспомогательной области приводит к следующим выражениям для основных геометрических и фильтрационных характеристик

$$\begin{aligned} \frac{M}{v_0} \int_0^{0.5} X_{BC} dt &= \Delta l; \quad \frac{M}{v_0} \int_0^{0.5} Y_{BC} dt = \Delta d; \quad \frac{M}{u_0} \int_0^{0.5} Y_{FG} dt = T; \\ M \left( \int_0^{0.5\rho} \Phi_{EF} dt + \int_0^{0.5} \Phi_{FG} dt \right) &= 0.5H, \end{aligned} \quad (6)$$



для координат точек подземного контура гидросооружения  $BC$

$$x_{BC}(t) = l - \frac{M}{v_0} \int_0^t X_{BC} dt; \tag{7}$$

$$y_{BC}(t) = -d_1 - \frac{M}{v_0} \int_0^t Y_{BC} dt; \quad 0 \leq t \leq 0.5,$$

для координат точек криволинейной части водоупора  $FG$

$$x_{FG}(t) = L - \frac{M}{u_0} \int_0^t X_{FG} dt; \tag{8}$$

$$y_{FG}(t) = -\frac{M}{u_0} \int_0^t Y_{FG} dt; \quad 0 \leq t \leq 0.5.$$

Здесь  $\Delta l = l - l_1$ ,  $\Delta d = d - d_1$ ,  $X_{BC}$ ,  $Y_{BC}$ ,  $\Phi_{EF}$ ,  $\Phi_{FG}$ ,  $X_{FG}$ ,  $Y_{FG}$  – выражения правых частей (5) на соответствующих участках контура плоскости  $\tau$ .

Полагая в уравнениях (6) и (7)  $t = 0.5$ , находим искомые размеры подземного контура плотины и криволинейного водоупора

$$l_1 = x_{BC}(0.5); \quad d_1 = y_{BC}(0.5);$$

$$l_2 = \frac{M}{v_0} \int_0^{0.5\rho} \Phi_{AG} \exp(\pi t) dt; \quad l_3 = L - x_{FG}(0.5). \tag{9}$$

В прямой физической постановке параметры конформного отображения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , модуль  $k$  и масштабная постоянная моделирования  $M$  являются искомыми и для их определения служат величины  $\Delta l$ ,  $\Delta d$ ,  $H$  и  $T$ , выражаемые уравнениями (6). Численным путем определяется монотонность функций, входящих в левые части этих уравнений и таким образом устанавливается ее однозначная разрешимость относительно искомым констант.

При этом постоянная моделирования  $M$  предварительно исключается из всех уравнений посредством четвертого выражения системы (6), фиксирующего величину  $H = 1$ .

Предельные случаи. Остановимся прежде всего на случае, когда точки  $F_1$ ,  $E$  и  $F$  в плоскости течения сливаются, т. е. когда горизонтальный непроницаемый участок отсутствует и на всем своем протяжении водоупор оказывается криволинейным [1]. В этом случае в плоскости  $\tau$  параметр  $\gamma = 0.5\rho$  и решение вытекает из формул (4)-(9), если в них положить  $\gamma = 1$ .

Другой предельный случай получается, когда водоупор на всем своем протяжении горизонтальный [2,3]. Тогда в плоскости движения  $z$  точки  $G$  и  $F$ , а также,  $G_1$  и  $F_1$





сливаются на бесконечности, а прямоугольник плоскости  $\tau$  вырождается в полуполосу. Решение для этого случая вытекает из формул (4)–(9), если в них положить модуль  $k = 0$ , при этом выражения для  $H$  и  $T$  удается проинтегрировать в явном виде:

$$H = \frac{2MK(k)}{\pi\sqrt{(1-\alpha^2\beta^2)(1-\gamma^2)}};$$

$$T = \frac{M}{v_0\sqrt{(1-\alpha^2)(1-\beta^2)(1-\gamma^2)}};$$

$$k = \sqrt{\frac{(1-\alpha^2\beta^2)(1-\gamma^2)}{(1-\alpha^2\gamma^2)(1-\beta^2)}}.$$
(10)

Последние формулы совпадают с известными ([3], с.191, формулы (7.17) и (7.18)) с точностью до обозначений.

**2.2. Анализ численных результатов.** Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров  $v_0$ ,  $H$ ,  $Q$ ,  $T$ ,  $\Delta l$  и  $\Delta d$  на размеры  $l_1$ ,  $d_1$  (а следовательно,  $l$  и  $d$ ),  $l_2$  и  $l_3$  приведены в табл. 1-3. В каждом из блоков таблиц один из указанных параметров варьируется в допустимом диапазоне, а значения остальных фиксируются:  $v_0 = 1$ ,  $H = 2$ ,  $Q = 1.14$ ,  $T = 1.934$ ,  $\Delta l = 0.308$  и  $\Delta d = 0.295$ . На рис. 4, I представлены зависимости  $d_1$  и  $l_1$  от параметра  $T$ , на рис. 4, II – зависимости  $l_2$  и  $l_3$  от параметра  $Q$ .

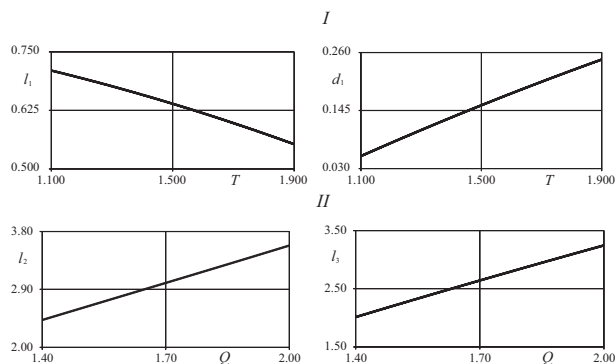


Рис. 4. Зависимости величин  $l_1$ ,  $d_1$  от  $T$  (I),  $l_2$ ,  $l_3$  от  $Q$  (II)

Анализ данных таблицы и графиков позволяет сделать следующие выводы.

Таблица 1

Результаты расчетов величин  $l_1$ ,  $d_1$ ,  $l_2$  и  $l_3$   
при варьировании значений  $v$  и  $H_0$

$v$	$l_1$	$d_1$	$l_2$	$l_3$	$H_0$	$l_1$	$d_1$	$l_2$	$l_3$
0.85	0.838	0.375	2.038	1.835	0.12	0.085	0.076	2.646	0.900
0.10	0.397	0.161	1.640	1.051	0.16	0.273	0.186	2.228	1.160
0.12	0.359	0.118	1.026	1.018	0.18	0.395	0.230	2.072	1.288



Таблица 2

Результаты расчетов величин  $l_1, d_1, l_2$  и  $l_3$   
при варьировании значений  $Q$  и  $T$

$Q$	$l_1$	$d_1$	$l_2$	$l_3$	$T$	$l_1$	$d_1$	$l_2$	$l_3$
1.4	0.571	0.226	2.426	2.014	1.1	0.710	0.055	1.265	1.543
1.8	0.597	0.200	3.192	2.846	1.7	0.598	0.202	1.795	1.626
2.0	0.601	0.195	3.579	3.245	1.9	0.553	0.246	0.020	1.668

Таблица 3

Результаты расчетов величин  $l_1, d_1, l_2$  и  $l_3$   
при варьировании значений  $\Delta l$  и  $\Delta d$

$\Delta l$	$l_1$	$d_1$	$l_2$	$l_3$	$\Delta d$	$l_1$	$d_1$	$l_2$	$l_3$
0.30	0.298	0.290	2.233	1.509	0.25	0.340	0.588	2.135	1.519
0.44	0.088	0.676	2.174	1.331	0.35	0.721	0.066	1.949	1.600
0.50	0.000	0.735	2.173	1.254	0.40	0.757	0.000	1.928	1.618

Уменьшение скорости обтекания и увеличение действующего на сооружение напора приводят к росту всех размеров плотины, а также величины горизонтального участка водоупора. Из табл. 1 следует, что изменение скорости в 1.4 раза увеличивает ширину  $l_1$  и толщину  $d_1$  соответственно на 133 и 218%. При этом наиболее существенное влияние на ширину гидросооружения и ее глубину оказывает действующий напор: из второго раздела табл. 1 видно, что при возрастании параметра  $H$  на 50% величины  $l_1$  и  $d_1$  изменяются в 4.6 и 3 раза соответственно.

Из данных первого раздела табл. 2 следует, что влияние фильтрационного расхода почти не сказывается на размерах плотины. В то же время, заметна тенденция к росту ширины сооружения  $l_1$  при увеличении фильтрационного расхода  $Q$  и уменьшении мощности пласта  $T$  (второй раздел табл. 2), а также к росту глубины  $d_1$ , напротив, при уменьшении параметра  $Q$  и увеличении  $T$  (рис. 4, I). Обращает на себя внимание, что наряду с параметром  $H$  мощность пласта также сильно влияет на глубину  $d_1$ , изменяя последнюю в 4.6 раза.

Разделы табл. 3, относящиеся к параметрам  $\Delta l$  и  $\Delta d$ , отражают следующую закономерность: увеличению разности  $\Delta l$  ( $\Delta d$ ) сопутствует убывание (рост) ширины плотины  $l$  и рост (убывание) ее глубины  $d$ . Так, с изменением  $\Delta l$  на 47% ширина  $l_1$  уменьшается в 3.4 раза, глубина  $d_1$  увеличивается в 2.3 раза, а при изменении  $\Delta d$  на 40% ширина  $l_1$  увеличивается в те же 2.3 раза, в то время как глубина  $d_1$  убывает уже в 8.8 раза. Последняя строка табл.3 соответствует случаям обтекания шпунта (зуба), когда  $l_1 = 0$ ,  $l = \Delta l$ , и флютбета с горизонтальной вставкой, где  $d_1 = 0$ ,  $d = \Delta d$  ([3], с. 196-200).

Особый интерес представляет характер выхода воды в нижнем бьефе  $l_2$  и размеры горизонтального участка водоупора  $l_3$ . Согласно данным табл. 2 и рис. 4, II с ростом

параметров  $Q$  и  $T$  ширина  $l_2$  увеличивается, а с ростом  $v_0$ ,  $H$ ,  $\Delta d$  и  $\Delta l$  уменьшается. При этом значения  $l_2$  и  $l_3$  могут быть весьма значительными: при  $Q = 2$  имеем  $l_2/l = 3.9$ ,  $l_3/l = 3.6$ ,  $l_2/d = 7.3$ ,  $l_3/d = 6.6$ .

### 3. Моделирование обтекания шпунта Жуковского через орошаемый почвенный слой с нижележащим сильнопроницаемым напорным горизонтом

**3.1. Постановка задачи и её решение.** Рассматриваемый далее случай схематично представлен на рис. 5.

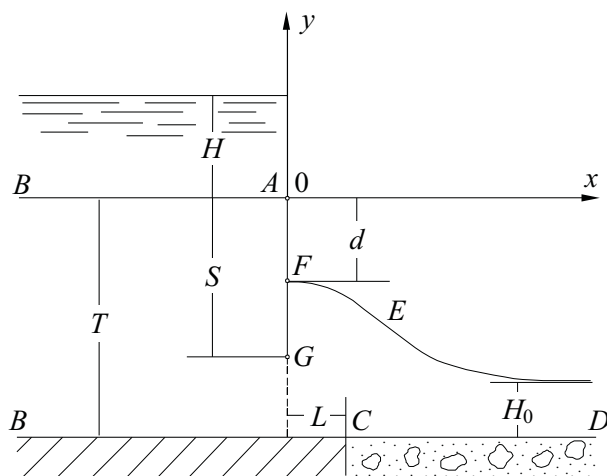


Рис. 5. Схема течения жидкости под шпунтом

Исследуется течение жидкости под шпунтом Жуковского через орошаемый (с равномерной интенсивностью инфильтрации  $\varepsilon$ ,  $0 < \varepsilon < 1$ ) почвенный слой мощности  $T$  в нижележащий хорошо проницаемый водоносный горизонт, напор в котором имеет постоянное значение  $H_0$ . При этом левая полубесконечная часть кровли пласта  $BC$  моделируется непроницаемым включением (водоупором, твёрдой породой и т.п.). Шпунт  $AGF$  обтекается грунтовой водой под влиянием разности напоров в верхнем бьефе и нижнем сильнопроницаемом слое грунта, за шпунтом вода поднимается на некоторую высоту  $GF$  и образует свободную поверхность  $DF$ . Однако, в отличие от [1] здесь коренным образом меняется характер течения: наличие подпора со стороны вод нижележащего горизонта вносит в фильтрационную схему дополнительную граничную точку – точку перегиба  $E$  свободной поверхности  $DF$ . Это обстоятельство значительно осложняет решение соответствующей краевой задачи, увеличивающей общее число неизвестных параметров конформного отображения. В рассматриваемом случае задача состоит в определении положения кривой депрессии  $DF$  при следующих краевых условиях:

$$\begin{aligned} AB : y = 0, \varphi = -H; & & BC : y = -T, \psi = 0; \\ DEF : \varphi = -y + H_0 - T, & & \psi = \varepsilon x + Q; \\ AGF : x = 0, \psi = Q; & & CD : y = -T, \varphi = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

$Q$  – фильтрационный расход. Нахождение высоты поднятия воды за шпунтом  $GF$ , т.е. величины  $d$ , а также расположение абсциссы точки  $C$ , т.е. величины  $L$  представляют известный практический интерес. Действующий напор  $H$ , расход  $Q$ , глубина почвенного слоя  $T$ , длина шпунта  $S$ , а также скорость обтекания на его конце  $V_G$  ( $0 < V_G < \varepsilon$ ) наряду с напором  $H_0$  и  $\varepsilon$  считаются заданными.

Область комплексной скорости  $w$ , которая соответствует краевым условиям (11) и представлена на рис. 6, *а*, имеет прямые углы и круговой разрез и, стало быть, принадлежит классу круговых многоугольников в полярных сетках [4].

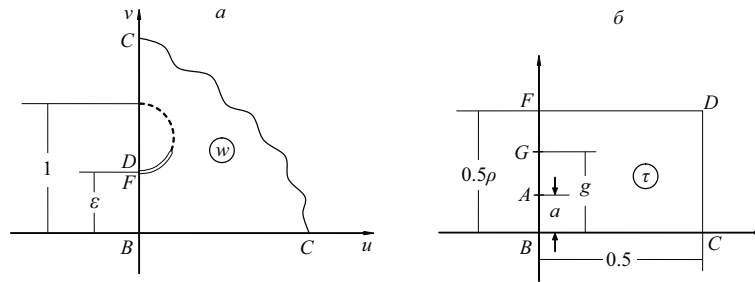


Рис. 6. Области: *а*) комплексной скорости  $w$ ;  
*б*) вспомогательной параметрической переменной  $\tau$

Поэтому вновь принимая в качестве вспомогательной параметрической переменной прямоугольник плоскости  $\tau$  (рис. 6, *б*) и применяя разработанную [5-8] методику построения отображающих функций для подобных многоугольников, найдем

$$w(\tau) = \sqrt{\varepsilon i} \frac{\vartheta_2(\tau + i\lambda) - \vartheta_2(\tau - i\lambda)}{\vartheta_2(\tau + i\lambda) + \vartheta_2(\tau - i\lambda)}; \quad \lambda = \frac{\operatorname{arth}\sqrt{\varepsilon}}{\pi}, \quad (12)$$

где  $\vartheta_2(\tau)$  – вторая тета-функция с параметром  $q = \exp(-\pi\rho)$ , однозначно связанным с модулем  $k$  [9].

Используя метод П.Я. Полубариновой-Кочкиной [3], который основан на применении аналитической теории линейных дифференциальных уравнений [10], и принимая во внимание соотношения  $w = d\omega/dz$  и (12), решение краевой задачи (11) получим в следующем параметрическом виде:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{d\tau} &= \sqrt{\varepsilon i} M \frac{\vartheta_2(\tau + i\lambda) - \vartheta_2(\tau - i\lambda)}{\vartheta_1(\tau) \operatorname{dn}(2K\tau, k) \Delta(\tau)}; \\ \frac{dz}{d\tau} &= M \frac{\vartheta_2(\tau + i\lambda) + \vartheta_2(\tau - i\lambda)}{\vartheta_1(\tau) \operatorname{dn}(2K\tau, k) \Delta(\tau)}; \\ \Delta(\tau) &= \sqrt{\chi_1^2 \operatorname{sn}^2(2K\tau, k) + \chi^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь  $\chi_1 = (1 - \chi^2)^{1/2}$ ,  $\chi = \operatorname{sn}(2Ka, \tau)$ ,  $a$  – ордината точки  $A$  в плоскости  $\tau$ .



В рассматриваемом случае неизвестные константы конформного отображения  $\chi$  (или  $a$ ),  $g$  (ордината точки  $G$  в плоскости  $\tau$ ), модуль  $k$  и масштабная постоянная моделирования  $M$  определяются в результате решения такой системы уравнений:

$$\begin{aligned} \sqrt{\varepsilon}w(gi) = V_G; \quad M \int_a^{0.5} Y_{AG} dt = S; \quad M\sqrt{\varepsilon} \int_0^{0.5} \Phi_{BC} dt = H; \\ \int_0^a \Phi_{AF} dt + k \int_0^{0.5} \Phi_{DF} dt - \int_0^{0.5} \Phi_{BC} dt = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

после чего вычисляются координаты точек свободной поверхности  $x_{DF}(t)$  и  $y_{DF}(t)$ ,  $0 \leq t \leq 0.5$ . Полагая в этих уравнениях  $t = 0.5$ , находим исходные размеры

$$\begin{aligned} d = T - H_0 - M\sqrt{\varepsilon} \int_0^{0.5} \Phi_{DF} dt; \quad Q = M\sqrt{\varepsilon} \int_0^a \Psi_{AB} dt; \\ L = M \left| \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \int_0^{0.5-\delta} X_{DF} dt - \int_0^{0.5\rho-\delta} X_{CD} dt \right) \right|, \end{aligned} \quad (15)$$

где  $Y_{AG}$ ,  $\Psi_{AB}$ ,  $\Phi_{BC}$ ,  $\Phi_{DF}$ ,  $X_{DF}$  и  $X_{CD}$  – выражения правых частей (13) на соответствующих участках контура области  $\tau$ .

**3.2. Анализ численных результатов.** Выделен небольшой диапазон изменения физических параметров модели.

На рис. 7 изображены кривые депрессии, координаты которых рассчитываются по формулам (15) при базовых значениях:  $V_G = 0.35$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ,  $T = 7$ ,  $S = 5.8$  и значениях  $H = 3$ ,  $H_0 = 1$  (нижняя кривая) и  $H = 1$ ,  $H_0 = 3$  (верхняя кривая).

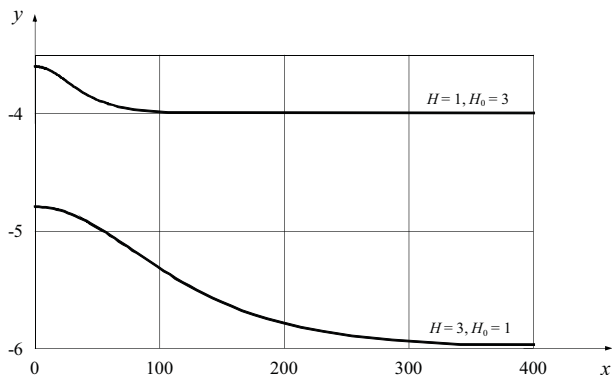


Рис. 7. Фрагмент картины течения в окрестности точки перегиба  $E$  кривой депрессии при  $V_G = 0.35$ ,  $\varepsilon = 0.4$ ,  $T = 7$ ,  $S = 5.8$  и  $H = 3$ ,  $H_0 = 1$  и  $H = 1$ ,  $H_0 = 3$



Результаты расчетов влияния определяющих физических параметров  $\varepsilon$ ,  $V_G$ ,  $T$ ,  $S$ ,  $H$  и  $H_0$  на размеры  $d$  и  $L$  представлены в табл. 4 и 5, состоящих из двух разделов, соответствующих двум базовым вариантам: для случая  $H > H_0$  (верхняя часть таблиц) и случая  $H < H_0$  (нижняя часть). На рис. 8 представлены зависимости величин  $d$ ,  $L$  и  $Q$  от указанных параметров.

Таблица 4

Результаты расчетов величин  $d$  и  $L_1$  при варьировании значений  $\varepsilon$ ,  $V_G$  и  $T$

$H, H_0$	$\varepsilon$	$d$	$L_1$	$V_G$	$d$	$L_1$	$T$	$d$
$H = 3$	0.2	5.130	88.10	0.05	5.324	5.932	6.9	4.691
и	0.5	4.993	7.686	0.20	5.014	16.84	7.5	5.291
$H_0 = 1$	0.8	3.915	3.299	0.35	4.791	98.59	8.0	5.791
$H = 1$	0.2	3.707	27.94	0.05	3.774	1.893	6.90	3.497
и	0.5	3.695	2.216	0.20	3.706	4.714	7.05	3.647
$H_0 = 3$	0.8	3.374	0.951	0.35	3.597	30.83	7.20	3.797

Таблица 5

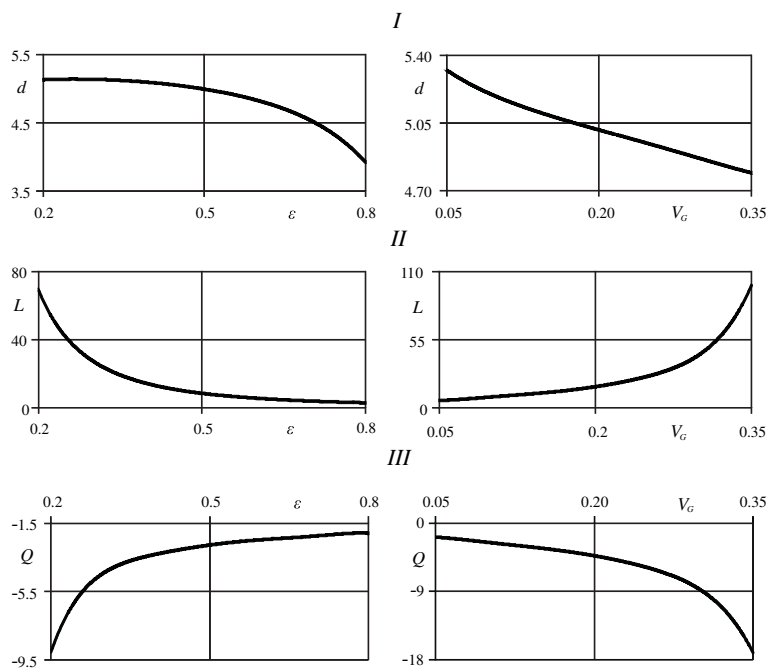
Результаты расчетов величин  $d$  и  $L_1$  при варьировании значений  $S$ ,  $H$  и  $H_0$

$H, H_0$	$S$	$d$	$L_1$	$H$	$d$	$L_1$	$H_0$	$d$
$H = 3$	4.8	4.788	99.0	2.0	5.204	64.70	0.5	5.291
и	5.4	4.790	98.7	3.5	4.586	115.4	0.8	4.991
$H_0 = 1$	5.9	4.792	98.6	5.0	3.973	165.5	1.1	4.691
$H = 1$	3.60	3.595	31.0	1.0	3.597	30.8	2.80	3.797
и	3.75	3.596	30.9	2.0	3.169	64.0	2.95	3.647
$H_0 = 3$	3.90	3.598	30.7	2.5	2.958	80.3	3.10	3.497

Анализ данных таблиц и графиков (рис. 8) позволяет сделать следующие выводы.

Увеличение интенсивности инфильтрации, скорости обтекания, обоих напоров и уменьшение мощности слоя и длины шпунта приводят к уменьшению величины  $d$ , т.е. увеличению ординаты точки  $F$  выхода кривой депрессии из-под шпунта. При этом наибольшее влияние на величину  $d$  оказывает мощность пласта  $T$ : данные табл. 4 показывают, что при возрастании параметра  $T$  всего в 1.1 раза значение  $d$  увеличивается на 23.5%. Из данных правых разделов табл. 4 и 5 следует, что величина  $d$  изменяется линейно по  $T$  и  $H_0$ , что естественно с физической точки зрения.

Особый интерес представляет расположение точки  $C$ , лежащей на границе непроницаемого основания и левого края нижележащего водоносного пласта, и в связи с этим поведение величины  $L$ . С ростом параметров  $V_G$  и  $H$  и убыванием  $\varepsilon$  и  $S$  ширина  $L$  увеличивается. Так, варьирование интенсивности инфильтрации и скорости обтекания изменяют ширину  $L$  в 26.7 и 16.6 раза соответственно. Варьирование параметров  $T$  и

Рис. 8. Зависимость величин  $d$  (I),  $L$  (II) и  $Q$  (III) от  $\varepsilon$  и  $V_G$ 

$H_0$  приводят к одним и тем же значениям  $L = 98.60$  в случае  $H > H_0$  и  $L = 30.83$  при  $H_0 > H$ , так что влияние мощности слоя и напора в нижележащем водоносном горизонте не очень сказывается на положении координаты точки  $C$ .

Расчеты показывают также, что как и в предельном случае  $H_0 = 0$ , варьирование всех физических параметров модели приводят к весьма незначительным изменениям фильтрационного расхода (в пределах 1-1.3 раза), при этом наблюдается линейная зависимость величины  $Q$  от варьируемых параметров.

Сравнение результатов вычислений величины  $d$  при одних и тех же значениях варьируемых параметров  $\varepsilon$ ,  $V_G$  и  $T$  показывает, что в случае, когда  $H > H_0$ , высота подъёма воды за шпунтом на 30-40%, а при изменении величины  $H$  даже на 64%, превышает соответствующие значения величины  $d$ , чем при  $H_0 > H$ . Еще более существенные различия наблюдаются при сравнении ширины  $L$ : в случае  $H > H_0$  при изменении параметров  $\varepsilon$  и  $V_G$  значение  $L$  на 213–215% больше величин, соответствующих случаю  $H_0 > H$ .

Существенную роль в формировании течения играют инфильтрация и напоры в бьефе и нижележащем водоносном горизонте. Выше установлено, что усиление инфильтрации и повышение напора в нижележащем водоносном пласте приводят к уменьшению величины  $d$ , т.е. сопровождается подъёмом свободной поверхности. При этом, как показывают расчёты, её точка перегиба  $E$ , перемещаясь вдоль границы влево, приближается к шпунту, справа же кривая депрессии выполаживается и становится фактически горизонтальной границей (рис. 7), что является признаком начинающегося подтопления.

Таким образом выявляется подпирющее воздействие инфильтрационного и напорного питания со стороны вод нижележащего пласта по отношению к фильтрации под



шпунтом. В практике гидротехнического строительства и орошаемого земледелия случаи повышения напора в основании покровных обложений вследствие систематического просачивания инфильтрационной влаги при её недостаточном естественном оттоке является весьма типичным. С последующим увеличением параметров  $\varepsilon$  и  $H_0$ , но в рамках уже другой фильтрационной схемы, подтопление всё больше развивается и, по-видимому, можно ожидать появления на свободной поверхности и второй точки перегиба с последующим возникновением в зоне шпунта бугра грунтовых вод подобно тому, как это происходит в аналогичных схемах при фильтрации из каналов [11, 12].

Пределный случай течения  $H_0 = 0$  (отсутствие подпора). Как показывает анализ, если зафиксировать все физические параметры схемы, то по мере убывания напора в нижнем хорошо проницаемом водоносном пласте точка перегиба свободной поверхности  $E$ , перемещаясь вдоль границы в направлении точки  $F$ , сливается с ней в переделе при  $\lambda = \lambda_* = 0.5\rho$ . При таком значении  $\lambda$  в области комплексной скорости  $w$  выпадает правая часть полукруга  $|w - i(1 + \varepsilon)/2| < (1 - \varepsilon)/2$ , а в плоскости течения  $z$  кривая депрессии выполаживается в точке  $D$  и выходит в ней на кровлю слоя под прямым углом. Учитывая, что при  $\lambda = \lambda_*$  [9]:

$$\vartheta_2\left(\tau + \frac{i\rho}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{-\pi\tau i} \vartheta_3(\tau); \quad \vartheta_2\left(\tau - \frac{i\rho}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt[4]{q}} e^{\pi\tau i} \vartheta_3(\tau),$$

и используя известные соотношения между эллиптическими и тета-функциями

$$\vartheta_1(\tau) = \sqrt{k} \operatorname{sn}(2K\tau, k) \vartheta_0(\tau); \quad \vartheta_3(\tau) = \frac{\operatorname{dn}(2K\tau, k) \vartheta_0(\tau)}{\sqrt{k'}}$$

в результате получаем выражения (12) и (13) в виде

$$w(\tau) = \sqrt{\varepsilon} \operatorname{tg}(\pi\tau); \tag{16}$$

$$\frac{d\omega}{d\tau} = \sqrt{\varepsilon} M \frac{\sin(\pi\tau)}{\operatorname{sn}(2K\tau, k) \Delta(\tau)}; \quad \frac{dz}{d\tau} = M \frac{\cos(\pi\tau)}{\operatorname{sn}(2K\tau, k) \Delta(\tau)}. \tag{17}$$

Так как в этом предельном случае  $\lambda = 0.5\rho = \pi^{-1} \operatorname{Arcth} \sqrt{\varepsilon}$ , то

$$\rho = \frac{K'}{K} = \frac{2 \operatorname{Arcth} \sqrt{\varepsilon}}{\pi}; \quad g = \frac{\operatorname{Arcth}(V_G/\sqrt{\varepsilon})}{\pi}. \tag{18}$$

Формулы (16)-(18) совпадают с соответствующими формулами (10)-(12) работы [1].

#### 4. Заключение

В работе даны точные аналитические решения задачи о построении плавного подземного контура основания гидротехнического сооружения с участками постоянной скорости обтекания при наличии водоупора, состоящего из горизонтального и двух криволинейных участков, характеризуемого также постоянством скорости фильтрации, а также задачи об обтекании шпунта Жуковского в орошаемом почвенном слое с нижележащем хорошо проницаемым водоносным горизонтом, левая часть кровли которого представляет собой непроницаемое включение.





### Литература

1. Береславский Э.Н., Александрова Л.А., Пестерев Е.В. Математическое моделирование фильтрационных течений под гидротехническими сооружениями // Науч. Вед. БелГУ. Сер. Математика, Физика. – 2009. – 5(60);16. – С.32-46.
2. Кочина И.Н., Полубаринова-Кочина П.Я. О применении плавных контуров основания гидротехнических сооружений // Прикл. математика и механика. – 1952. – 16. – С.57-66.
3. Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод /2-е изд./ П.Я. Полубаринова-Кочина. – М.:Наука, 1977. – 664 с.
4. Коппенфельс В. Штальман Ф. Практика конформных отображений / пер. с нем. К.М.Фишмана; под ред. Л.И. Волковыского / В. Коппенфельс, Ф. Штальман. – М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1963. – 406 с.
5. Береславский Э.Н. О дифференциальных уравнениях класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых многоугольников в полярных сетках // Дифференц. уравнения. – 1997. – 33;3. – С.296-301.
6. Береславский Э.Н. О конформном отображении некоторых круговых многоугольников на прямоугольник // Изв. вузов. Математика. – 1980. – 5. – С.3-7.
7. Береславский Э.Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, встречающихся в гидро- и аэромеханике // Докл. РАН. – 2009. – 428. – 4. – С.439-443.
8. Береславский Э.Н. Об интегрировании в замкнутой форме некоторых дифференциальных уравнений класса Фукса, связанных с конформным отображением круговых пятиугольников с разрезом // Дифференц. уравнения. – 2010. – 46. – 4. – С.459-466.
9. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов, рядов и произведений / И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. – М.: Наука, 1971. – 1108 с.
10. Голубев В.В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений // В.В. Голубев. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 436 с.

### MODELLING OF SOME FILTRATION CURRENTS WITH UNKNOWN BOUNDARIES

E.N. Bereslavskiy, L.A. Aleksandrova, E.V. Pesterev

State University of Civil Aviation,  
Saint-Petersburg, 197349, Russia, e-mail: [eduber@mail.ru](mailto:eduber@mail.ru)

**Abstract.** In the framework of the two-dimensional stationary filtration theory of the incondensable liquid according to the Darsi law in the uniform and isotropic soil some filtration currents are studied under the hydrotechnical building where some sites of constant flow velocity exist and under the



Zhukovsky groove through the irrigated soil stratum with the underlying strong-penetrable pressure horizon. The solution of corresponding multivariable mixed boundary problems of the analytical function theory is realized by means of the method conformal mappings of some special areas. Results of numerical calculations and detailed hydrodynamic analysis of the influence of different model parameters on currents are given.

**Key words:** filtering, groundwater, dam, groove, velocity hodograph, conformal mappings.



УДК 531.1

## НЕСЕПАРАБЕЛЬНОСТЬ СЛУЧАЙНЫХ МНОЖЕСТВ С МАРКОВСКИМ ИЗМЕЛЬЧЕНИЕМ В ОДНОМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ ПОГРУЖЕНИЯ

Ю.П. Вирченко, О.Л. Шпилинская

Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: [virch@bsu.edu.ru](mailto:virch@bsu.edu.ru)  
Институт монокристаллов НАНУ,  
пр. Ленина, 60, Харьков, Украина, e-mail: [spilolga@isc.kharkov.ua](mailto:spilolga@isc.kharkov.ua)

**Аннотация.** Доказана теорема о несепарабельности случайных множеств с марковскими измельчениями, пространством погружения которых является полуинтервал действительной оси.

**Ключевые слова:** случайные множества, марковские измельчения, несепарабельность.

**1. Введение.** В работе [1] были конструктивно определены случайные множества в пространстве погружения  $\mathbb{R}$ , построенные на основе так называемых марковских измельчений. Эти множества замечательны тем, что они обладают свойством фрактальности – каждая их случайная реализация с вероятностью 1 имеет мощность континуума и, вместе с тем, нулевую лебегову меру пространства погружения. Множества указанного класса были названы нами *случайными множествами с марковскими измельчениями*. Было доказано, что каждая их типичная случайная реализация обладает с вероятностью единица неслучайной размерностью Хаусдорфа. Вместе с тем, оказывается, и доказательству этого факта посвящена настоящая работа, что такие множества не обладают свойством сепарабельности. Это обстоятельство приводит к следующей проблеме. Случайные множества с марковскими измельчениями вводятся в [1] как предельные множества для траекторий специальных стохастических динамических систем. Такое определение затрудняет оперирование их распределением вероятностей при вычислении различного рода математических ожиданий, в частности, при вычислении статистических средних каких-то локальных характеристик случайных реализаций аналогично тому, как это делается в теории случайных процессов. В последнем случае, вычисление средних значений локальных характеристик случайных траекторий процессов осуществляется, как правило, на основе многоточечных распределений вероятностей случайных процессов. При этом очень важно, чтобы многоточечные распределения, в некотором смысле, однозначно характеризовали случайный процесс. Если реализуется такое положение, то можно считать, что случайный процесс определяется поточечно, несмотря на то, что каждая его траектория состоит из континуума случайных точек, а распределение вероятностей процесса должно быть задано на основе значений вероятностей счётного множества случайных событий. Однозначная характеристика случайного процесса многоточечными распределениями гарантируется известной теоремой Колмогорова, которая утверждает, что если процесс обладает



т.н. свойством *сепарабельности*, то он, действительно, определяется полным набором согласованных многоточечных распределений.

Ввиду однозначной связи между случайными множествами и соответствующими им индикаторными случайными процессами, а также, ввиду непосредственной связи (по крайней мере, при наличии свойства замкнутости случайных множеств) между их свойствами сепарабельности (множеств и процессов), несепарабельность множеств с марковскими измельчениями приводит к тому, что их локальное внутреннее вероятностное описание на основе многоточечных распределений вероятностей является неадекватным. В связи с этим, возникает вопрос о том, в каких терминах локальная характеристика этих случайных множеств всё же допустима.

**2. Случайные множества с марковскими измельчениями.** Для простоты изложения ниже даётся определение случайных множеств с марковскими измельчениями для того случая, когда пространством погружения является полуинтервал  $[0, 1)$ .

Составными элементами, из которых конструируются множества с марковскими измельчениями являются открытые справа полуинтервалы  $\delta \subset [0, 1)$ . Их совокупности мы будем обозначать прописными рукописными буквами. Вместе с тем, при описании случайных событий, связанных с этими случайными множествами, удобно указывать концы (координаты) этих полуинтервалов – точки из  $[0, 1)$ . Они будут обозначаться нами греческими буквами  $\alpha$  и  $\xi$  и, по необходимости, снабжаться индексами. Не более чем счётные совокупности точек из  $[0, 1)$  обозначаются далее большими греческими буквами, а заведомо несчётные – большими латинскими буквами. В последнем случае, если множество точек представляет собой случайную реализацию, то оно помечается сверху знаком "тильда".

Пусть  $N \in \mathbb{N}$ ,  $N \geq 2$  и  $\mathcal{K}_1 = \{\delta_j \equiv [j/N, (j+1)/N); j = 0 \div N-1\}$  – совокупность дизъюнктивных полуинтервалов, образующих разложение единицы полуинтервала  $[0, 1)$ . Рассмотрим вероятностное пространство  $\langle \mathcal{K}_1, \mathfrak{K}_1, q[\cdot] \rangle$ , в котором  $\mathfrak{K}_1 = 2^{\mathcal{K}_1}$  является булевой алгеброй с  $2^N$  элементами, а распределение вероятностей  $q[\cdot]$  на  $\mathfrak{K}_1$  обладает специальным свойством  $q[\emptyset] = 0$ . Оно, как будет видно из дальнейшего рассмотрения, гарантирует непустоту случайной реализации конструируемого нами случайного множества.

Каждое случайное множество с марковскими измельчениями описываемого нами типа полностью определяется значением параметра  $N$ , который мы называем *параметром дробления* и распределением вероятностей  $q[\cdot]$ .

Введём далее следующие обозначения. Пусть  $m$  – натуральное число, и  $\mathcal{K}_m$  – множество полуинтервалов следующего вида  $\mathcal{K}_m = \{[j/N^m, (j+1)/N^m); j = 0 \div N^m - 1\}$ . Каждому классу полуинтервалов  $\Gamma \subset \mathcal{K}_m$  (каждый из них однозначно характеризуется своим левым концом, и поэтому класс  $\Gamma$  можно отождествить с конечным множеством точек – левых концов полуинтервалов, входящих в этот класс) сопоставим подмножество  $D_m(\Gamma) \subset [0, 1)$ , которое определяется формулой

$$D_m(\Gamma) = \bigcup_{\delta \in \Gamma} \delta.$$



Семейство всех таких подмножеств обозначим  $\mathfrak{K}_m$ :

$$\mathfrak{K}_m = \{D_m(\Gamma); \emptyset \neq \Gamma \subset \mathcal{K}_m\}.$$

При каждом фиксированном  $m$  оно представляет собой булеву алгебру. При этом алгебры с различными значениями  $m$  связываются включениями  $\mathfrak{K}_m \subset \mathfrak{K}_{m+1}$ ,  $m \in \mathbb{N}$ .

Наконец, введём операцию проектирования  $R_m$  любого подмножества  $X \subset [0, 1)$  в семейство  $\mathfrak{K}_m$ , а именно,  $R_m$  представляет собой отображение  $R_m : 2^{[0,1)} \mapsto \mathfrak{K}_m$ , определяемое формулой

$$R_m(X) = \bigcup_{\delta \in \mathcal{K}_m : \delta \cap X \neq \emptyset} \delta, \quad R_m(X) \in \mathfrak{K}_m.$$

Очевидно, что для всякого множества  $X \subset [0, 1)$  последовательность  $\langle R_m(X); m \in \mathbb{N} \rangle$  нерасширяющаяся,  $R_m(X) \supset R_{m+1}(X)$ , и имеет место теоретико-множественный предел

$$X = \lim_{m \rightarrow \infty} R_m(X). \quad (1)$$

Компоненты указанной последовательности строятся в виде объединений

$$R_m(X) = \bigcup_{\delta \in \Delta_m} \delta,$$

в которых  $\Delta_m = \{\delta \in \mathcal{K}_m : \delta \cap X \neq \emptyset\}$ .

Ввиду свойства (1), для любого случайного множества и, в частности, для множества с марковскими измельчениями, каждая случайная реализация  $\tilde{X}$  может быть определена в виде теоретико-множественного предела

$$\tilde{X} = \lim_{m \rightarrow \infty} R_m(\tilde{X}), \quad (2)$$

где проекции

$$R_m(\tilde{X}) = \bigcup_{\delta \in \tilde{\Delta}_m} \delta,$$

определяются случайным классом полуинтервалов  $\tilde{\Delta}_m = \{\delta \in \mathcal{K}_m : \delta \cap \tilde{X} \neq \emptyset\}$  или, что эквивалентно, случайным множеством левых концов этих полуинтервалов. При этом если заданы распределения вероятностей  $P_m$  в вероятностных пространствах  $\langle \mathcal{K}_m, \mathfrak{K}_m, P_m \rangle$ ,  $m \in \mathbb{N}$ , то определено распределение вероятностей  $P$  конструируемого случайного множества в виде предела

$$P(A) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(R_m(A))$$

для любого случайного события  $A$  из  $\sigma$ -алгебры

$$\mathfrak{K} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathfrak{K}_m.$$

Распределение вероятностей для случайных множеств с марковскими измельчениями определяется посредством специального задания последовательности  $\langle P_m; m \in \mathbb{N} \rangle$



распределений вероятностей. Значения этих распределений  $P_m(Z) = \Pr\{R_m(\tilde{X}) = Z\}$ ,  $Z \in \mathfrak{K}_m$ ,  $m \in \mathbb{N}$  связываются в марковскую цепь. А именно, для любой пары  $Z \in \mathfrak{K}_{m+1}$ ,  $Y \in \mathfrak{K}_m$  такой, что  $R_m(Z) = Y$  имеет место

$$P_{m+1}(Z) = \Pr\{R_{m+1}(\tilde{X}) = Z | R_m(\tilde{X}) = Y\} P_m(Y), \quad (3)$$

где условная вероятность определяется однородным марковским *условием ветвления*

$$\Pr\{R_{m+1}(\tilde{X}) = Z | R_m(\tilde{X}) = Y\} = \prod_{\delta \in S_m(Y)} q[S_1(T_m(Z \cap \delta))]. \quad (4)$$

Здесь  $T_m$  – операция, состоящая из такого сдвига множества  $Z \cap \delta \subset \delta$ , который совмещает левый конец полуинтервала  $\delta$  с нулём, и из последующего растяжения относительно нуля сдвинутого множества в  $N^m$  раз так, что перенесённый полуинтервал совмещается с  $[0, 1)$ . Посредством  $S_m(Y)$  в (4) обозначен набор тех полуинтервалов, принадлежащих  $\mathfrak{K}_m$ , из которых составляется множество  $Y$ , то есть  $S_m(Y) = \{\delta \in \mathfrak{K}_m : \delta \cap Y \neq \emptyset\}$ .

Не всякое множество, сконструированное по описанной схеме, является, в действительности, случайным. Для наличия случайности (множественности) предельных реализаций  $\tilde{X}$  необходима и достаточна *невыврожденность* распределения вероятностей  $q[\cdot]$ . Это распределение мы называем *вырожденным*, если в  $\mathfrak{K}_1$  найдётся такая совокупность  $\Gamma \subset \mathfrak{K}_1$  полуинтервалов  $\delta$ , для которой  $q[\Gamma] = 1$ . Среди вырожденных распределений  $q[\cdot]$  есть такое, которое мы называем *тривиальным* и при котором  $\tilde{X}_m = [0, 1)$  для всех  $m \in \mathbb{N}$ . Для тривиального распределения  $\Gamma = \mathfrak{K}_1$ .

**Теорема о несепарабельности.** Нам понадобится следующее определение сепарабельности случайного множества [2], [3].

**Определение 1** [3]. Случайное замкнутое множество  $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$  в  $\mathbb{R}$  со случайными реализациями  $\tilde{X} \in \Omega$  называется сепарабельным, если для любого счётного, всюду плотного в пространстве погружения множества  $\Lambda$  выполняется

$$\Pr\{\tilde{X} = \text{cl}(\tilde{X} \cap \Lambda)\} = 1.$$

Таким образом, случайное множество  $\langle \Omega, \mathfrak{A}, P \rangle$  в пространстве погружения  $[0, 1)$  является несепарабельным (по Матерону), если в  $[0, 1)$  найдётся счётное, всюду плотное множество  $\Lambda$ , для которого

$$\Pr\{\tilde{X} = \text{cl}(\tilde{X} \cap \Lambda)\} < 1.$$

Для случайных множеств с марковскими измельчениями роль пространства  $\Omega$  элементарных событий выполняет

$$\mathfrak{K} = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathfrak{K}_m = 2^{[0,1)},$$

а роль  $\sigma$ -алгебры  $\mathfrak{A}$  выполняет  $\sigma$ -алгебра  $\mathfrak{K}$ . Докажем теперь основное утверждение настоящей работы.



**Теорема.** При любом значении параметра дробления  $N$  и при любом нетривиальном распределении вероятностей  $q[\cdot]$  случайное множество  $\langle \mathcal{K}, \mathfrak{K}, \mathcal{P} \rangle$  с марковскими измельчениями несепарабельно.

□ **А.** Пусть  $\langle \mathcal{K}, \mathfrak{K}, \mathcal{P} \rangle$  – случайное множество с марковским измельчением, определяемое значением  $N$  параметра дробления и распределением вероятностей  $q[\cdot]$  на  $\mathcal{K}_1$ .

Докажем, что для нетривиального  $q[\cdot]$  в  $\mathcal{K}_1$  всегда найдется такой полуинтервал  $\delta_r = [r/N, (r+1)/N)$ , что имеет место неравенство

$$\sum_{Z \in \mathfrak{K}_1: \delta \subset Z} q[S_1(Z)] < 1. \quad (5)$$

Допустим противное, что для любого  $\delta \in \mathcal{K}_1$  имеет место

$$\sum_{Z \in \mathfrak{K}_1: \delta_r \subset Z} q[S_1(Z)] = 1. \quad (6)$$

Система из всех  $N$  уравнений (6) для неотрицательных чисел  $q[S_1(Z)]$  таких, что  $q[\emptyset] = 0$  и

$$\sum_{Z \in \mathfrak{K}_1} q[S_1(Z)] = 1, \quad (7)$$

имеет единственное решение

$$q_*[S_1(Z)] = \begin{cases} 1 & ; S_1(Z) = \mathcal{K}_1 \text{ (или } Z = [0, 1)), \\ 0 & ; S_1(Z) \neq \mathcal{K}_1 \text{ (или } Z \neq [0, 1)), \end{cases} \quad (8)$$

удовлетворяющее (7). Единственность этого решения устанавливается следующим образом. Рассмотрим любое решение системы (6), которое представляет собой набор неотрицательных чисел, связанных условием (7). Зафиксируем полуинтервал  $\delta \in \mathcal{K}_1$ . Из уравнения системы (6) для этого полуинтервала и условия (7) следует, что

$$\sum_{Z \in \mathfrak{K}_1: \delta \cap Z = \emptyset} q[S_1(Z)] = 0.$$

Так как все числа  $q[S_1(Z)]$  неотрицательны, то отсюда следует, что  $q[S_1(Z)] = 0$  для всех  $Z \in \mathfrak{K}_1$ , для которых  $\delta \cap Z = \emptyset$ . Ввиду произвольности полуинтервала  $\delta \in \mathcal{K}_1$ , получаем, что  $q[S_1(Z)] > 0$  только в том случае, когда  $Z \cap \delta \neq \emptyset$  для всех полуинтервалов  $\delta$  из  $\mathcal{K}_1$ . Тогда имеется единственная возможность –  $Z = [0, 1)$ . Так как, по предположению,  $q[\cdot]$  нетривиально, то сделанное нами предположение неверно, и, по крайней мере, для одного полуинтервала  $\delta$  выполняется неравенство (5).

**В.** Рассмотрим счётное множество  $N$ -адических периодических дробей

$$\Lambda = \{0, (\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} r)_N; \alpha_j \in \{0, 1, 2, \dots, N-1\}, j = 1 \div (k-1)\}.$$

Это множество всюду плотно в  $[0, 1)$ . Действительно, пусть  $x = 0, (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n \dots)_N \in [0, 1)$ , то есть имеет место разложение

$$x = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\xi_l}{N^l}. \quad (9)$$

Тогда

$$|x - 0, (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1} r)_N| < (N - 1) \sum_{l=k}^{\infty} \frac{1}{N^l} = \frac{1}{N^{k-1}},$$

и поэтому последовательность  $\langle x_k = 0, (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1} r)_N; k \in \mathbb{N} \rangle$  чисел из  $\Lambda$  такова, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x.$$

**С.** Вычислим вероятность события  $\{R_m(\{x\}) \subset R_m(\tilde{X})\}$  для произвольной точки  $x = 0, (\xi_1 \xi_2 \dots)_N \in \Lambda$  с некоторым периодом  $k \in \mathbb{N}$ , где  $\xi_{j+k} = \xi_j, j \in \mathbb{N}$  и  $\xi_{kl} = r$  при всех  $l \in \mathbb{N}$ . Введём обозначение для значений сумм

$$q_j = \sum_{Z \in \mathfrak{K}_1: \delta_j \subset Z} q[S_1(Z)].$$

Будем считать, что полуинтервал, существование которого доказывается в п. **А**, имеет номер  $r$ , и поэтому  $\delta_r < 1$ .

Искомая нами вероятность  $Q_m = \Pr\{R_m(\{x\}) \subset R_m(\tilde{X})\}$  выражается суммой

$$Q_m = \sum_{Z \in \mathfrak{K}_m: R_m(\{x\}) \subset Z} P_m(Z). \tag{10}$$

Вероятности  $Q_m$  и  $Q_{m+1}$  связаны рекуррентным соотношением. С целью его получения сначала воспользуемся формулой (3)

$$\begin{aligned} Q_{m+1} &= \sum_{Z \in \mathfrak{K}_{m+1}: R_{m+1}(\{x\}) \subset Z} P_{m+1}(Z) = \\ &= \sum_{Z \in \mathfrak{K}_{m+1}: R_{m+1}(\{x\}) \subset Z} \Pr\{R_{m+1}(\tilde{X}) = Z | R_m(\tilde{X}) = R_m(Z)\} P_m(R_m(Z)), \end{aligned}$$

а затем – условием марковского ветвления (4),

$$Q_{m+1} = \sum_{Z \in \mathfrak{K}_{m+1}: R_{m+1}(\{x\}) \subset Z} P_m(R_m(Z)) \prod_{\delta \in S_m(R_m(Z))} q[S_1(T_m(Z \cap \delta))].$$

Последнюю операцию суммирования представим в виде двух повторных суммирований следующего вида

$$\sum_{Z \in \mathfrak{K}_{m+1}: R_{m+1}(\{x\}) \subset Z} \dots = \sum_{Y \in \mathfrak{K}_m: R_{m+1}(\{x\}) \subset Y} \sum_{Z \in \mathfrak{K}_{m+1}: R_{m+1}(\{x\}) \subset Z, R_m(Z) = Y} \dots$$

В результате получим

$$Q_{m+1} = \sum_{Y \in \mathfrak{K}_m: R_m(\{x\}) \subset Y} P_m(Y) \sum_{Z \in \mathfrak{K}_{m+1}: R_{m+1}(\{x\}) \subset Z, R_m(Z) = Y} \prod_{\delta \in S_m(Y)} q[S_1(T_m(Z \cap \delta))],$$





где мы воспользовались тем, что для множеств  $Y \subset \mathfrak{K}_m$  условия  $R_{m+1}(\{x\}) \subset Y$  и  $R_m(\{x\}) \subset Y$  эквивалентны. Далее, переставим вторую операцию суммирования в правой части последнего равенства с операцией вычисления произведения, согласно правилу

$$\sum_{Z \in \mathfrak{K}_{m+1} : R_{m+1}(\{x\}) \subset Z, R_m(Z) = Y} \prod_{\delta \in S_m(Y)} \dots = \prod_{\delta \in S_m(Y)} \sum_{Z \in \mathfrak{K}_{m+1} : R_m(Z) = \delta, Z \supset \delta \cap R_{m+1}(\{x\})} \dots$$

Условие  $Z \supset \delta \cap R_{m+1}(\{x\}) \neq \emptyset$  вырезает в сумме, отмеченной полуинтервалом  $\delta \ni x$  только слагаемые с множествами  $Z$ , содержащими полуинтервал  $R_{m+1}(\{x\})$ .

В результате указанного преобразования получаем

$$Q_{m+1} = \sum_{Y \in \mathfrak{K}_m : R_m(\{x\}) \subset Y} P_m(Y) \prod_{\delta \in S_m(Y)} \sum_{Z \in \mathfrak{K}_{m+1} : R_m(Z) = \delta, Z \supset \delta \cap R_{m+1}(\{x\})} q[S_1(T_m(Z))] . \quad (11)$$

Для всех полуинтервалов  $\delta$ , для которых  $\delta \cap R_{m+1}(\{x\}) = \emptyset$  выполняется

$$\sum_{Z \in \mathfrak{K}_{m+1} : R_m(Z) = \delta} q[S_1(T_m(Z))] = \sum_{Z \in \mathfrak{K}_1} q[S_1(Z)] = 1 .$$

Для единственного же полуинтервала  $\delta$  среди всей совокупности  $\mathfrak{K}_m$ , для которого  $R_{m+1}(\{x\}) \subset \delta$  имеем

$$\sum_{Z \in \mathfrak{K}_{m+1} : R_m(Z) = \delta, Z \supset R_{m+1}(\{x\})} q[S_1(T_m(Z))] = \sum_{Z \in \mathfrak{K}_1 : Z \supset T_m(R_{m+1}(\{x\}))} q[S_1(Z)] = q_{\xi_{m+1}} , \quad (12)$$

так как множество  $T_m(R_{m+1}(\{x\}))$  представляет собой полуинтервал  $\delta_{\xi_{m+1}}$  из набора  $\mathfrak{K}_1$  с левой граничной точкой  $\xi_{m+1}/N$ , то есть имеющий номер, равный величине  $(m+1)$ -й компоненты в  $N$ -м разложении (9) числа  $x = 0, (\xi_1 \xi_2 \dots)_N$ .

Результат (12) не зависит от множеств  $Y$ , по которым происходит суммирование во внешней сумме в (11). Тогда из (11) следует искомое рекуррентное соотношение между вероятностями  $Q_{m+1}$  и  $Q_m$ ,

$$Q_{m+1} = q_{\xi_{m+1}} Q_m .$$

Используя это соотношение, индукцией по  $m \in \mathbb{N}$ , учитывая, что

$$P_0 = \Pr\{R_{m+1}(\{x\}) \subset [0, 1)\} = 1 ,$$

находим выражение для вероятности  $Q_m$ ,

$$Q_m = \prod_{j=1}^m \left( \sum_{Z \in \mathfrak{K}_1 : Z \supset \delta_{\xi_j}} q[S_1(Z)] \right) = \prod_{j=1}^m q_{\xi_j} . \quad (13)$$

**Д.** Теперь докажем, что рассматриваемое случайное множество с марковским измельчением несепабельно. Для этого достаточно показать, что  $\Pr\{\tilde{X} \cap \Lambda \neq \emptyset\} = 0$ . Заметим, что

$$\Pr\{\tilde{X} \cap \Lambda \neq \emptyset\} \leq \sum_{x \in \Lambda} \Pr\{\tilde{X} \ni x\} . \quad (14)$$



Оценим сверху вероятность события  $\{x \in \tilde{X}\}$  для произвольной точки  $x \in \Lambda$ . Для этого представим эту вероятность следующим образом:

$$\Pr\{x \in \tilde{X}\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \Pr\{\tilde{X} \cap R_m(\{x\}) \neq \emptyset\} = \lim_{m \rightarrow \infty} \Pr\{R_m(\{x\}) \subset R_m(\tilde{X})\} = \lim_{m \rightarrow \infty} Q_m. \tag{14}$$

Из (13) следует оценка

$$Q_m \leq \prod_{l=1}^{\lfloor \frac{m}{k} \rfloor} q_{\xi_{lk}} = q_r^{\lfloor m/k \rfloor},$$

ввиду периодичности дроби  $x = 0, (\xi_1 \xi_2 \dots \xi_{k-1}, r)_N$ ,  $\xi_{lk} = r$ . Здесь  $\lfloor m/k \rfloor$  обозначает целую часть дроби  $m/k$ . Из этой оценки и того факта, что  $q_r < 1$ , из представления (14) следует

$$\Pr\{x \in \tilde{X}\} = 0.$$

Тогда

$$\Pr\{\tilde{X} \cap \Lambda \neq \emptyset\} \leq \sum_{x \in \Lambda} \Pr\{x \in \tilde{X}\} = 0.$$

Поэтому  $\Pr\{\tilde{X} = \text{cl}(\tilde{X} \cap \Lambda)\} = 0$ . ■

### Литература

1. Virchenko Yu.P., Shpilinskaya O.L. Random Point Fields with Markivian Refinements and the Geometry of Fractally Disordered Media // Theor. and Mathem. Phys. – 2000. – 124;3.
2. Булинский А.В., Ширяев А.Н. Теория случайных процессов / А.В. Булинский, А.Н. Ширяев. – М.: Физматлит, 2003.
3. Matheron G. Random Sets and Integral Geometry / G.Matheron. – New York: John Wiley and Sons, 1975.

## NONSEPARABILITY OF RANDOM SETS WITH MARKOVIAN REFINEMENTS IN ONE-DIMENSIONAL SPACE

Yu.P. Virchenko, O.L. Shpilinskaya

Belgorod State University,  
 Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: [virch@bsu.edu.ru](mailto:virch@bsu.edu.ru)  
 Single Crystal Institute of NASU,  
 Lenin Av., 60, Kharkov, Ukraine, e-mail: [spilolga@isc.kharkov.ua](mailto:spilolga@isc.kharkov.ua)

**Abstract.** The nonseparability of random sets with markovian refinements being contained in the half-interval of the real axe is proved.

**Key words:** random sets, markovian refinements, nonseparability.



УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

## О ЧИСЛЕННОМ МОДЕЛИРОВАНИИ ЗАДАЧИ МАСКЕТА СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ<sup>1)</sup>

О.В. Гальцев, О.А. Гальцева

Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: [galtsev@bsu.edu.ru](mailto:galtsev@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Работа посвящена задаче фильтрации двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей различной плотности, разделенных свободной границей. Среди математических моделей совместного движения двух несмешивающихся жидкостей хорошо известна задача Маскета. В работе приведены результаты численной аппроксимации известной математической модели Маскета, используемой для описания фильтрации указанного типа, точными микроскопическими моделями со свободной границей для структуры порового пространства в виде изолированных капилляров.

**Ключевые слова:** задача Маскета, задача со свободной границей, фильтрация жидкости.

**1. Введение.** В работе рассматривается численная аппроксимация модели Маскета [9], описывающей совместное движение двух несмешивающихся жидкостей в пористой среде, например, вытеснение нефти водой. Она является одной из большого числа моделей, предназначенных для решения указанной задачи описания и удовлетворяющих основным ограничениям, вытекающим из её физической постановки. Модель Маскета описывает фильтрацию несмешивающихся несжимаемых жидкостей различной вязкости и различной плотности, разделенных движущейся границей (свободной границей).

Движение одной из жидкостей, имеющей постоянную вязкость  $\mu^+$  и постоянную плотность  $\rho_f^+$ , происходит в области  $\Omega^+(t)$ . Оно описывается системой уравнений фильтрации Дарси

$$\mathbf{v}^+ = -\frac{k}{\mu^+} \nabla p_f^+ + \rho_f^+ \mathbf{F}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^+ = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \quad (1)$$

для макроскопической скорости  $\mathbf{v}^+$  течения этой жидкости и её давления  $p_f^+$ .

Соответственно, движение другой жидкости в области  $\Omega^-(t)$ , имеющей постоянную вязкость  $\mu^-$  и постоянную плотность  $\rho_f^-$ , описывается аналогичной системой уравнений

$$\mathbf{v}^- = -\frac{k}{\mu^-} \nabla p_f^- + \rho_f^- \mathbf{F}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v}^- = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega^-(t), \quad (2)$$

для её скорости течения  $\mathbf{v}^-$  и давления  $p_f^-$ .

<sup>1)</sup>Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009-2013 годы (госконтракт № 02.740.11.0613).



Будем полагать, что на свободной границе  $\Gamma(t) = \partial\Omega^+(t) \cap \partial\Omega^-(t)$ , разделяющей обе жидкости, давления и нормальные скорости непрерывны:

$$p_f^+ = p_f^-, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad (3)$$

$$\mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n} = V_n, \quad \mathbf{x} \in \Gamma(t), \quad (4)$$

где  $\mathbf{n}$  есть единичный вектор нормали к границе  $\Gamma(t)$  в точке  $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$  и  $V_n$  есть скорость границы  $\Gamma(t)$  в направлении нормали  $\mathbf{n}$  в точке  $\mathbf{x} \in \Gamma(t)$ .

Условие (4) означает, что граница  $\Gamma(t)$  представляет собой поверхность, которая в течение всего движения состоит из одних и тех же материальных точек. Это условие позволяет сформулировать понятие слабого решения задачи Маскета. А именно, определим давление  $p$  неоднородной жидкости

$$p_f = p_f^+, \quad \text{если } \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \quad \text{и } p_f = p_f^-, \quad \text{если } \mathbf{x} \in \Omega^-(t),$$

и скорости  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}^+, \quad \text{если } \mathbf{x} \in \Omega^+(t), \quad \text{и } \mathbf{v} = \mathbf{v}^-, \quad \text{если } \mathbf{x} \in \Omega^-(t).$$

Тогда неизвестные функции  $\mathbf{v}$ ,  $p_f$  и  $\rho_f$  будут решениями системы уравнений фильтрации Дарси

$$\mathbf{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p_f + \rho_f \mathbf{F}, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0, \quad (5)$$

и уравнение переноса

$$\frac{d\rho_f}{dt} \equiv \frac{\partial \rho_f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_f = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad t > 0. \quad (6)$$

Первое уравнение в (5) (закон Дарси) понимается в обычном смысле почти всюду в  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ , а второе уравнение (уравнение неразрывности) понимается в смысле теории распределений, как интегральное тождество

$$\int_{\Omega_T} \mathbf{v} \cdot \nabla \psi \, dxdt = 0$$

для произвольной гладкой функции  $\psi$ . Аналогично, понимается уравнение переноса (6). А именно, используя равенство

$$\varphi \mathbf{v} \cdot \nabla \rho_f = \nabla \cdot (\mathbf{v} \rho_f \varphi) - \rho_f \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi - \rho_f \varphi \nabla \cdot \mathbf{v},$$

и уравнение неразрывности получим, после умножения уравнения (6) на произвольную гладкую финитную в области  $\Omega_T$  функцию  $\varphi$  и интегрирования по частям, интегральное тождество

$$\int_{\Omega_T} \rho_f \frac{d\varphi}{dt} \, dxdt = 0,$$

которое выполняется для всех таких функций  $\varphi$ .



Постановка задачи дополняется однородным граничным условием

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in S = \partial\Omega, \quad t > 0, \quad (7)$$

где  $\mathbf{n}$  есть нормальный вектор к границе  $S$ , и начальным условием

$$\rho_f(\mathbf{x}, 0) = \rho_f^0(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (8)$$

где

$$\rho_f^0(\mathbf{x}) = \rho_f^+ = \text{const} > 0, \quad \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_0^+ = \Omega^+(0),$$

и

$$\rho_f^0(\mathbf{x}) = \rho_f^- = \text{const} > 0, \quad \text{если } \mathbf{x} \in \Omega_0^- = \Omega^-(0).$$

Развитие методов математического анализа в последние десятилетия позволило решить вопрос об адекватности некоторых моделей подземной гидродинамики. На главный вопрос о выполнимости закона Дарси был дан положительный ответ Л.Тартаром (L.Tartar, 1980г.). Он изучил движение вязкой жидкости, описываемое на микроскопическом уровне уравнениями Стокса

$$\alpha_\mu \Delta \mathbf{v} - \nabla p + \rho \mathbf{F} = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (9)$$

(движение в периодических порах размера  $\varepsilon$ ) и, используя методы теории усреднения, строго вывел закон Дарси при  $\varepsilon \searrow 0$  для случая абсолютно твёрдого скелета грунта. Таким образом, математическая модель фильтрации жидкости, описываемая системой уравнений Дарси, нашла своё обоснование на микроскопическом уровне.

Естественно ожидать, что аналогичным образом может быть обоснована модель Маскета. С этой целью, задачу со свободной границей о совместном движении в периодических порах размера  $\varepsilon$  двух несмешивающихся жидкостей необходимо рассмотреть на микроскопическом уровне и затем перейти к усреднённой задаче с последующим предельным переходом при  $\varepsilon \searrow 0$ . В нашей работе мы попытались реализовать эту схему численно на примере задачи о неустойчивости Рэлея-Тейлора, рассмотрев движение двух жидкостей под действием силы тяжести.

В классической гидродинамике идеальных жидкостей, если более тяжёлая жидкость находится сверху, то наблюдается так называемая неустойчивость Рэлея-Тейлора. При её изучении прослеживаются следующие ярко выраженные стадии: линейная, промежуточная, регулярная, асимптотическая и турбулентная [2],[3]. Неустойчивость Рэлея-Тейлора наиболее исследована для случая плоской поверхности раздела и стремящегося к бесконечности отношения плотностей тяжелой и легкой жидкостей. Линейная стадия подробно изучена в классических работах Рэлея, Тейлора и Льюиса [4],[5],[6], регулярная асимптотическая – в работах Биркгофа [7], в [8] развита феноменологическая теория турбулентной стадии, а в [3] высказаны некоторые соображения о механизме её образования.

Однако, аналитического математического аппарата для анализа в целом рэлей-тейлоровской неустойчивости в идеальной жидкости недостаточно. Экспериментальные

же исследования весьма трудоемки. В такой ситуации наиболее полная информация об этой неустойчивости может быть получена на основе численных расчётов.

В случае медленных движений вязких жидкостей, описываемых системой уравнений Стокса, задача о поведении границы раздела двух жидкостей изучена аналитически [1]). Вне зависимости от того, какая жидкость находится сверху, граница раздела остаётся гладкой и не теряет свою регулярность.

Для макроскопической модели Маскета никаких результатов аналитического или численного анализа неустойчивости Рэля – Тейлора автору не известно (есть несколько работ о существовании классического решения в малом отрезке времени или глобального решения по времени, находящегося вблизи некоторого точного решения [4], [12], [14]).

В настоящей статье приведены результаты, полученные при решении системы уравнений

$$\alpha_\mu \Delta \mathbf{u} - \nabla p - \rho \mathbf{e}_2 = 0, \quad \nabla \cdot \mathbf{u} = 0,$$

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0$$

в отдельно взятом капилляре. Это решение есть аппроксимация задачи Маскета со свободной границей для структуры порового пространства в виде изолированных капилляров.

Расчёты двумерного течения при наличии рэлей-тейлоровской неустойчивости показали хорошие совпадения с результатами [13]. На рис. 1 приведены хорошо различимые формы контактной поверхности в различные моменты времени

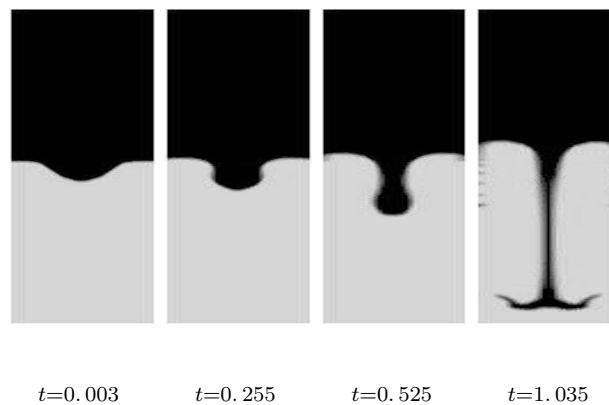


Рис. 1. Форма контактной поверхности в различные моменты времени при двумерной рэлей-тейлоровской неустойчивости

При увеличении количества капилляров ( $\varepsilon \searrow 0$ ) чёткой границы раздела двух жидкостей не наблюдается. При этом становится различимой переходная фаза (рис.2)  $\rho^- \leq \rho \leq \rho^+$ .

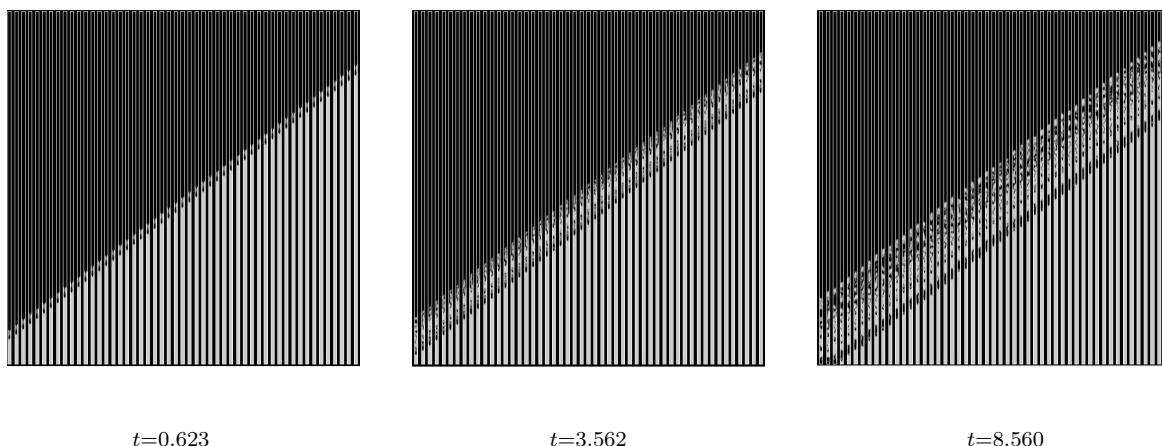


Рис. 2. Периодические изолированные капилляры

Заметим, что при задании начального возмущения в расчетах со сжимаемыми средами важно везде соблюдать условие  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  (за исключением поверхности раздела), иначе возникнут возмущения, которые могут исказить картину развития неустойчивости Рэлея-Тейлора.

## 2. Вычислительный алгоритм

Для численного моделирования задачи Маскета был выбран случай абсолютно твёрдого скелета грунта. А именно, на микроскопическом уровне была рассмотрена задача со свободной границей совместного движения в периодически расположенных порах размера  $\varepsilon$  двух несмешивающихся жидкостей. Поры были выбраны в виде изолированных капилляров.

Для моделирования совместного движения жидкости в отдельно взятом капилляре на микроскопическом уровне решалось уравнение Стокса

$$\alpha_\mu \Delta \mathbf{u} - \nabla p - \rho \mathbf{e}_2 = 0, \quad (10)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (11)$$

и уравнение переноса

$$\frac{d\rho}{dt} \equiv \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = 0, \quad (12)$$

при условии, что

$$\rho(x, 0) = \begin{cases} \rho^+, & x_2 > R_0(x_1) \\ \rho^-, & x_2 < R_0(x_1) \end{cases} \quad (13)$$

Система уравнений (2.1)-(2.4) дополняется однородными условиями:

$$\begin{aligned} p_f^+ &= p_f^-, & \mathbf{x} &\in \Gamma(t), & \mathbf{v}^+ \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{v}^- \cdot \mathbf{n} = V_n, & \mathbf{x} &\in \Gamma(t), \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} &= 0, & \mathbf{x} &\in S = \partial\Omega, & t &> 0. \end{aligned}$$

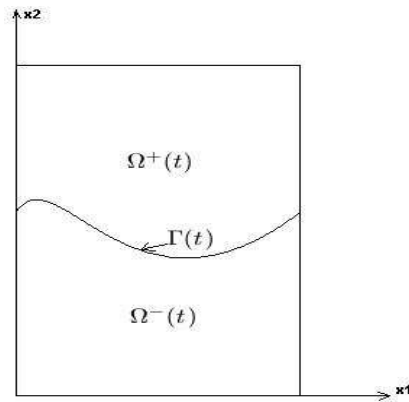


Рис. 3. Область  $\Omega^\pm(t)$

При моделировании задачи использовался модифицированный метод расщепления. Выбор данного метода обуславливается тем, что его разностная схема позволяет рассчитывать течения вязкой несжимаемой жидкости без использования граничного условия для вихря на твёрдой поверхности и при всех прочих равных условиях обладает большей эффективностью.

Расчёты для одного капилляра размера  $\varepsilon$  проводились в области масштаба  $1 \times 200$ . При этом очень важно, что для фиксированного  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon$  - характерный размер поры) доказано [1], что существует единственное решение задачи, в которой граница раздела двух жидкостей есть липшицева поверхность.

Основная трудность при численном решении системы уравнений (2.1),(2.2) связана с расчётом поля давления. Первый значительный успех в преодолении отмеченной трудности был достигнут благодаря использованию идеи искусственной сжимаемости [12]. Существо этой идеи состоит во введении в уравнение неразрывности дополнительного члена вида  $\frac{\partial}{\partial t}(p+u^2/2)$ . В результате получается модифицированная система уравнений вида

$$\alpha_\mu \Delta \mathbf{u} - \nabla p - \rho \mathbf{e}_2 = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

В нашем случае уравнение неразрывности будет иметь вид

$$\frac{\partial p}{\partial t} + N \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \tag{14}$$

В отличие от стандартного метода расщепления, мы не будем рассчитывать отдельно промежуточное поле скоростей и подправлять его с учётом градиента давления, а, заменив на начальном шаге по времени величину  $p$  в уравнении (2.1) выражением  $N\tau\xi_0$ , где  $\xi_0$  – малая функция, получим легко решаемое уравнение

$$\alpha_\mu \Delta \mathbf{u} + \tau N \nabla \xi_0 - \rho \mathbf{e}_2 = 0, \tag{15}$$

где  $N$  – большой параметр,  $\alpha_\mu = 2\mu/\tau Lg\rho_0$ ,  $L$  – характерный размер рассматриваемой области,  $g$  – сила тяжести,  $\mu$  есть вязкость жидкости.





Приведенные итерации повторяются до тех пор, пока во всей области не будет полностью вычислено поле скоростей на текущем временном шаге. Затем на следующем временном шаге полагается  $\xi_{i+1} = \text{div } \mathbf{u}_{i+1}$ . Если  $|\xi_{i+1}| > 0$  вплоть до указанного порядка, то необходимо увеличить  $N$  и повторить цикл. При  $N \rightarrow \infty$  выполняется переход от слабосжимаемой жидкости к несжимаемой. Подставив полученные значения скорости в уравнение переноса, находим плотность жидкости в следующий момент времени.

После расчёта поля скоростей мы переходим к решению уравнения переноса с соответствующими значениями компонент вектора скорости на текущем временном шаге.

При использовании в численном моделировании прямоугольной системы координат исследуемая область покрывается равномерной по  $x$  и  $y$  сеткой ячеек

$$\Omega_f = \left( \begin{array}{l} x_{i+1} = (i+1)h, \quad h > 0, \quad i = 0, 1, \dots, L; \quad (L+1)h = X_{\max} \\ y_{j+1} = (j+1)h, \quad h > 0, \quad j = 0, 1, \dots, M; \quad (M+1)h = Y_{\max} \end{array} \right),$$

где  $h$  – размер шагов сетки,  $L$  и  $M$  – числа ячеек сетки соответственно в направлениях осей  $x$  и  $y$ .

Здесь используется последовательное вычисление значений скоростей и плотностей жидкостей на отдельных накладывающихся сетках. Это означает, что каждая компонента вектора скорости вычисляется на разнесённой сетке отдельно, после чего вычисляется изменение плотности на следующем временном шаге в соответствии с изменением значения скорости.

В случае декартовой системы координат и равномерной сетки двумерная разностная схема имеет следующий вид:

$$u_{i,j} = \frac{au_{i,j+1} + au_{i,j-1} + v_{i+1,j+1} - v_{i-1,j+1} - v_{i+1,j-1} + u_{i-1,j-1} + bu_{i+1,j} + bu_{i-1,j}}{2b + 2a}, \quad (16)$$

$$v_{i,j} = \frac{av_{i+1,j} + av_{i-1,j} + u_{i+1,j+1} - u_{i-1,j+1} - u_{i+1,j-1} + v_{i-1,j-1} + bv_{i,j+1} + bv_{i,j-1}}{2b + 2a}. \quad (17)$$

Так как начальные значения плотностей для жидкостей известны, то для уравнения переноса была выбрана явная схема:

$$\rho_{i,j} = \frac{1}{2p} [\tau u(\rho_{i+1,j} - \rho_{i-1,j}) + \tau v(\rho_{i,j+1} - \rho_{i,j-1})], \quad (18)$$

где  $a = 4h\alpha_\mu$ ,  $b = 4h(\alpha_\mu - 1)$ ,  $u$  и  $v$  – узлы ячеек с координатами  $(i, j)$ ,  $\tau$  – шаг по времени.

При замене дифференциальной задачи конечно-разностным представлением особое внимание следует уделять аппроксимации граничных условий, так как конкретная аппроксимация последних влияет на точность метода, устойчивость схемы, а также на скорость сходимости.

В случае, когда боковые стенки – твёрдая поверхность, то условие непротекания представляется в виде

$$v_{i,j-1} = 0, \quad (19)$$



а условие прилипания – в виде

$$u_{i\pm 1, j-1} = 0. \quad (20)$$

Из последнего условия следует, что в случае прямоугольной декартовой системы координат скорость жидкости у твёрдой границы будет

$$u_{i+1, j}^{(n+1)} = \frac{u_{i+1, j}^{(n)}}{2} + \frac{u_{i+1, j+2}^{(n)}}{6} + h^3. \quad (21)$$

Учитывая поведение жидкости на границе с твёрдым скелетом и, решая систему уравнений (2.1)–(2.4), получим картину изменения положения двух жидкостей относительно друг друга в отдельном капилляре.

Для получения приближенного решения задачи Маскета необходимо рассмотреть периодическую структуру, состоящую из изолированных капилляров и тем самым усреднить задачу при  $\varepsilon \searrow 0$ .

### Литература

1. Antontsev S., Meirmanov A., Yurinsky B.V., A Free Boundary Problem for Stokes Equations: Classical Solutions // Interfaces and Free Boundaries. – 2000. – 2. – P.413-424.
2. Биркгоф Г. Неустойчивость Гельмгольца и Тейлора / В кн.: Гидродинамическая неустойчивость. – М.: Мир, 1964. – С.68-94.
3. Inogamov N.A. Turbulent phase of the Rayleigh-Taylor instability // N.A. Inogamov. – 1978. – Черногловка: Институт теоретич. физ. им. Л.Д.Ландау АН СССР, 1978.
4. Lord Rayleigh. Theory of sound V.2 / Lord Rayleigh. – N.Y.:Dover Publications Inc., 1984.
5. Taylor G. The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their plans. I // Proc. Roy. Soc. – 1950. – Ser. A. – 201,1065. – P.192-196.
6. Lewis D.G. The instability of liquid surface when accelerated in a direction perpendicular to their plans. II. // Proc. Roy. Soc. – 1950. – Ser.A. – 202,1068. – P.81-96.
7. Birkhoff G. Los Alamos Scientific Lab., Rept. №LA-1982. – Los Alamos, 1955.
8. Беленьких С.З., Фрадкин Е.С. Теория турбулентного перемешивания // Тр. ФИАН СССР. – 1965. – 29. – С.207-238.
9. Fahuai Yi, Global classical solution of Muskat free boundary problem // J. Math. Anal. Appl. – 2003. – 288. – P.442–461.
10. Radkevich E., On the spectrum of the pencil in the Verigin-Muskat problem // Sbornik: Mathematics. – 1995. – 80,1. – P.33-74.
11. Siegel M., Caffish R.E, Howison S. Global existence, singular solutions, and ill-posedness for the Muskat problem // Comm. on Pure and Appl. Math. – 2004. – LVII. – P.1-38.



12. Владимирова Н.Н., Кузнецова Б.Г., Яненко Н.Н. Численные расчеты симметричного обтекания пластинки плоским потоком вязкой несжимаемой жидкости // В кн.: Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики. – Новосибирск: Наука, 1996. – С.186-192.
13. Daly B.J., Numerical study of two fluid Rayleigh-Taylor instability // Phys. Fluids. – 1967. – 10,2. – P.297-307.

## ABOUT THE NUMERICAL SIMULATION OF MUSKAT PROBLEM

O.V.Galtsev, O.A.Galtseva

Belgorod State University,

Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: [Galtsev@bsu.edu.ru](mailto:Galtsev@bsu.edu.ru)

**Abstract.** The filtration of two immiscible incompressible liquids with various viscosity and density divided by free boundary is studied. The Muskat model being most plausible and physically correct is considered. The problem connected with the filtration modelling in the porous space structure is investigated.

**Key words:** Muskat problem, free boundary problem, liquid filtration.



УДК 517.983

## ВЕСОВЫЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ АБСТРАКТНОГО УРАВНЕНИЯ МАЛЬМСТЕНА<sup>2)</sup>

А.В. Глушак, О.А. Покручин

Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: [Glushak@bsu.edu.ru](mailto:Glushak@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** Установлены формулы, связывающие решение весовых задач Коши для абстрактного дифференциального уравнения Мальмстена с операторной функцией Бесселя и проинтегрированной косинус-оператор-функцией.

**Ключевые слова:** весовые задачи Коши, проинтегрированная косинус-оператор-функция, операторная функция Бесселя.

Ослабление требований на разрешающие операторы задачи Коши для абстрактных дифференциальных уравнений первого и второго порядков привело к понятию проинтегрированной полугруппы и проинтегрированной косинус-оператор-функции (в дальнейшем ПКОФ). В работах [1, 2] приводятся формулы, связывающие ПКОФ  $C_{k/2}(t)$  с операторной функции Бесселя  $Y_k(t)$  – разрешающим оператором задачи Коши для уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД)

$$u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) = Au(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

$$u(0) = u_0, \quad u'(0) = 0. \tag{2}$$

В уже цитируемых работах [1, 2] приводится и определение ПКОФ, и формула связи операторной функции Бесселя  $Y_k(t)$  с ПКОФ  $C_{k/2}(t)$ , имеющая вид

$$Y_{2\alpha}(t)u_0 = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha + 1/2)}{\sqrt{\pi} t^\alpha} \left( C_\alpha(t)u_0 - \int_0^1 P'_{\alpha-1}(\tau) C_\alpha(t\tau)u_0 d\tau \right), \tag{3}$$

где  $P_{\alpha-1}(\tau)$  – сферическая функция Лежандра [3].

В настоящей работе будет показано, что ОФБ и ПКОФ могут быть использованы и для построения решений весовых задач Коши для уравнения Мальмстена [4, с. 113].

**Первая весовая задача Коши.** Пусть  $E$  – банахово пространство,  $A$  – оператор, действующий в  $E$ , с областью определения  $D(A)$ . Рассмотрим следующую весовую задачу Коши для уравнения Мальмстена

$$u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) + \frac{l}{t^2} u(t) = t^m Au(t), \quad t > 0, \tag{4}$$

---

<sup>2)</sup>Работа первого автора выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант № 10-01-00276.



$$\lim_{t \rightarrow 0} (t^{(k-1-\nu(m+2))/2} u(t)) = u_0, \quad (5)$$

где параметр  $\nu = \frac{\sqrt{(k-1)^2 - 4l}}{m+2} \geq 0$ . Отметим сразу, что для рассматриваемого дифференциального уравнения второго порядка не ставится ("снимается") второе начальное условие при  $t = 0$ , что характерно для ряда уравнений с особенностью в коэффициентах.

Разрешающий оператор задачи (4), (5) будем обозначать  $Y_{k,l}^m(t)$ , а множество операторов  $A$ , для которых задача (4), (5) разрешима, обозначим через  $G_{k,l}^m$ . Наряду с этим множеством рассмотрим множество  $G_k$  операторов  $A$ , для которых разрешима задача Коши для уравнения ЭПД (1), (2).

**Теорема 1.** Пусть  $\nu \geq 0$ ,  $m > -2$ , оператор  $A \in G_{2\nu+1}$  и  $u_0 \in D(A)$ . Тогда задача (4), (5) имеет решение, которое представимо в виде

$$u(t) \equiv Y_{k,l}^m(t)u_0 = t^{(1-k+\nu(m+2))/2} Y_{2\nu+1}(\tau)u_0, \quad (6)$$

где  $\tau = \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2}$ .

□ Найдем первую и вторую производные от функции  $u(t) = Y_{k,l}^m(t)u_0$ . Имеем

$$u'(t) = \left( \frac{1-k+\nu(m+2)}{2} \right) t^{(-1-k+\nu(m+2))/2} Y_{2\nu+1}(\tau)u_0 + t^{(m+1-k+\nu(m+2))/2} Y'_{2\nu+1}(\tau)u_0,$$

$$u''(t) = \left( \frac{1-k+\nu(m+2)}{2} \right) \left( \frac{-1-k+\nu(m+2)}{2} \right) t^{(-3-k+\nu(m+2))/2} Y_{2\nu+1}(\tau)u_0 + \\ + \left( \frac{m+2}{2} - k + \nu(m+2) \right) t^{(m-1-k+\nu(m+2))/2} Y'_{2\nu+1}(\tau)u_0 + t^{(2m+1-k+\nu(m+2))/2} Y''_{2\nu+1}(\tau)u_0.$$

Подставляя найденные производные в левую часть уравнения (4), получим

$$u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) + \frac{l}{t^2} u(t) = t^{(2m+1-k+\nu(m+2))/2} Y''_{2\nu+1}(\tau)u_0 + \\ + \left( \frac{m+2}{2} + \nu(m+2) \right) t^{(m-1-k+\nu(m+2))/2} Y'_{2\nu+1}(\tau)u_0. \quad (7)$$

Чтобы вычислить  $AY_{k,l}^m(t)u_0$ , воспользуемся уравнением

$$Y''_{2\nu+1}(\tau)u_0 + \frac{(\nu+1/2)(m+2)}{t^{(m+2)/2}} Y'_{2\nu+1}(\tau)u_0 = AY_{2\nu+1}(\tau)u_0, \quad (8)$$

которому удовлетворяет функция  $Y_{2\nu+1}(\tau)u_0$ . Из (7), (8) следует, что функция  $u(t) = Y_{k,l}^m(t)u_0$  удовлетворяет уравнению (4).

Справедливость начального условия в (5) вытекает из условий (2), которым удовлетворяет функция  $Y_{2\nu+1}(\tau)u_0$ . ■

**Замечание.** При  $m > -1$  решение (6) удовлетворяет соотношению

$$\lim_{t \rightarrow 0} (t^{(k-1-\nu(m+2))/2} u(t))' = 0.$$

Для проверки этого факта воспользуемся формулой [5]

$$Y'_k(t)u_0 = \frac{t}{k+1} Y_{k+2}(t)Au_0, \quad (9)$$

на основе которой получаем

$$(t^{(k-1-\nu(m+2))/2} u(t))' = (Y_{2\nu+1}(\tau)u_0)'_t = t^{m/2} Y'_{2\nu+1}(\tau)u_0 = \frac{2}{(m+2)(2\nu+2)} t^{m+1} Y_{2\nu+3}(\tau)Au_0.$$

Поскольку по условию замечания  $m > -1$ , то требуемое соотношение выполнено.

**Следствие 1.** Пусть  $\nu \geq 0$ ,  $m > -2$ ,  $\tau = \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2}$  и  $A$  – генератор ПКОФ  $C_{\nu+1/2}(t)$ . Тогда

$$Y_{k,l}^m(t) = \frac{\Gamma(\nu+1)(m+2)^{\nu+1/2} t^{-(2k+m)/4}}{\sqrt{\pi}} \left( C_{\nu+1/2}(\tau) - \int_0^1 P'_{\nu-1/2}(s) C_{\nu+1/2}(s\tau) u_0 ds \right).$$

Для доказательства следствия 1 достаточно воспользоваться предыдущей теоремой 1 и формулой (3).

**Следствие 2.** Пусть  $k \geq 1$  и  $A \in G_k$ . Тогда  $G_{k,0}^0 = G_k$  и  $Y_{k,0}^0(t) = Y_k(t)$ .

Для доказательства следствия 2 заметим, что при  $k \geq 1$ ,  $l = 0$ ,  $m = 0$  задача (4), (5) превращается в задачу Коши (1), (2) для уравнения ЭПД.

Приводимые далее следствия 3 – 5 вытекают из теоремы 1 и следующей формулы сдвига по параметру (см. [5])

$$Y_m(t) = \frac{2}{B(k/2 + 1/2, m/2 - k/2)} \int_0^1 (1-s^2)^{(m-k)/2-1} s^k Y_k(ts) ds, \quad m > k, \quad (10)$$

где  $B(\cdot, \cdot)$  – бета-функция.

**Следствие 3.** Пусть  $\nu \geq 0$ ,  $2\nu + 1 > k \geq 0$ ,  $m > -2$  и  $A \in G_k$ . Тогда имеет место вложение  $G_k \subset G_{k,l}^m$  и при этом

$$Y_{k,l}^m(t) = \frac{2t^{(1-k+\nu(m+2))/2}}{B(k/2 + 1/2, \nu - k/2 + 1/2)} \int_0^1 (1-s^2)^{(2\nu+1-k)2-1} s^k Y_k(\tau s) ds, \quad \tau = \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2}.$$

**Следствие 4.** Пусть  $\nu \geq 0$ ,  $k \geq 0$ ,  $2\nu + 1 < k$ ,  $m > -2$  и  $A \in G_{k,l}^m$ . Тогда имеет место вложение  $G_{k,l}^m \subset G_k$  и при этом

$$Y_k(t) = \frac{2^{1+\nu-(k-1)/(m+2)} ((m+2)t)^{(k-1)/(m+2)-\nu}}{B(\nu+1, k/2 - \nu - 1/2)} \times$$



$$\times \int_0^1 (1-s^2)^{(2\nu+1-k)2-1} s^{k+(k-1)/(m+2)-\nu} Y_{k,l}^m \left( \left( \frac{m+2}{2} ts \right)^{\frac{2}{m+2}} \right) ds.$$

**Следствие 5.** Пусть  $\nu \geq 0$ ,  $2\nu + 1 = k$ ,  $m > -2$ . Тогда  $G_{k,l}^m = G_k$  и

$$Y_{k,l}^m(t) = t^{\nu m/2} Y_k(\tau), \quad \tau = \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2}.$$

**Вторая весовая задача Коши.** В этом пункте для уравнения Мальмстена рассмотрим еще одну весовую задачу Коши. При  $0 < \nu < \frac{1}{2}$ ,  $m > -1$  будем разыскивать решение уравнения (4), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} (t^{(k-1+\nu(m+2))/2} u(t)) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} (t^{(k-1+\nu(m+2))/2} u(t))' = 0. \quad (11)$$

Покажем, что операторная функция Бесселя может быть также использована для построения решения задачи (4), (11). Разрешающий оператор этой задачи обозначим через  $Z_{k,l}^m(t)$ , а множество операторов  $A$ , для которых задача (4), (11) разрешима, обозначим через  $H_{k,l}^m$ .

**Теорема 2.** Пусть  $0 < \nu < \frac{1}{2}$ ,  $m > -1$ , оператор  $A \in G_{1/2-\nu}$  и  $u_0 \in D(A)$ . Тогда задача (4), (11) имеет решение, которое представимо в виде

$$Z_{k,l}^m(t)u_0 = t^{(1-k-\nu(m+2))/2} Y_{1-2\nu}(\tau)u_0, \quad \tau = \frac{2}{m+2} t^{(m+2)}. \quad (12)$$

□ Найдем первую и вторую производные от функции  $u(t) = Z_{k,l}^m(t)u_0$ . Имеем

$$u'(t) = \left( \frac{1-k-\nu(m+2)}{2} \right) t^{(-1-k-\nu(m+2))/2} Y_{1-2\nu}(\tau)u_0 + t^{(m+1-k-\nu(m+2))/2} Y'_{1-2\nu}(\tau)u_0,$$

$$u''(t) = \left( \frac{1-k-\nu(m+2)}{2} \right) \left( \frac{-1-k-\nu(m+2)}{2} \right) t^{(-3-k-\nu(m+2))/2} Y_{1-2\nu}(\tau)u_0 + \\ + \left( \frac{m+2}{2} - k - \nu(m+2) \right) t^{(m-1-k-\nu(m+2))/2} Y'_{1-2\nu}(\tau)u_0 + t^{(2m+1-k-\nu(m+2))/2} Y''_{1-2\nu}(\tau)u_0.$$

Подставляя найденные производные в левую часть уравнения (4), получим

$$u''(t) + \frac{k}{t} u'(t) + \frac{l}{t^2} u(t) = t^{(2m+1-k-\nu(m+2))/2} Y''_{1-2\nu}(\tau)u_0 + \\ + \left( \frac{m+2}{2} - \nu(m+2) \right) t^{(m-1-k-\nu(m+2))/2} Y'_{1-2\nu}(\tau)u_0. \quad (13)$$



Как и в теореме 1, нам понадобится уравнение, которому удовлетворяет функция  $w(\tau) = Y_{1-2\nu}(\tau)u_0$ ,

$$w''(\tau) + \frac{1-2\nu}{\tau}w'(\tau) = Aw(\tau). \quad (14)$$

Подставив (13), (14) в уравнение (1), убеждаемся, что  $u(t) = Z_{k,l}^m(t)u_0$  удовлетворяет уравнению (1). Справедливость первого начального условия в (11) очевидна, а для проверки второго воспользуемся формулой (9). Будем иметь

$$(t^{(k-1+\nu(m+2))/2}u(t))' = (Y_{1-2\nu}(\tau)u_0)'_t = t^{m/2}Y'_{1-2\nu}(\tau)u_0 = \frac{1}{(m+2)(1-\nu)}t^{m+1}Y_{3-2\nu}(\tau)Au_0.$$

Поскольку по условию теоремы  $m > -1$ , то второе начальное условие в (10) также выполнено. ■

**Следствие 6.** Пусть  $\nu > 0$ ,  $m > -1$ ,  $\tau = \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}$  и  $A$  – генератор ПКОФ  $C_{1/2-\nu}(t)$ . Тогда

$$Z_{k,l}^m(t)u_0 = \frac{\Gamma(-\nu+1)(m+2)^{1/2-\nu}t^{-(2k+m)/4}}{\sqrt{\pi}} \times \\ \times \left( C_{1/2-\nu}(\tau)u_0 - \int_0^1 P'_{-\nu-1/2}(s)C_{1/2-\nu}(s\tau)u_0 ds \right). \quad (15)$$

□ Для доказательства следствия 6 достаточно воспользоваться теоремой 2 и формулой (3). ■

**Следствие 7.** Пусть  $0 < k \leq 1$  и  $A \in G_k$ . Тогда  $Z_{k,0}^0(t)u_0 = Y_k(t)u_0$  и  $H_{k,0}^0 = G_k$ .

□ Для доказательства следствия 2 заметим, что при  $0 < k \leq 1$ ,  $l = 0$ ,  $m = 0$  задача (4), (11) превращается в задачу Коши (1), (2) для уравнения ЭПД. ■

И в рассматриваемом случае справедливы аналоги следствий 3 – 5.

**Следствие 8.** Пусть  $\nu > 0$ ,  $1 - 2\nu > k \geq 0$ ,  $m > -1$  и  $A \in G_k$ . Тогда имеет место вложение  $G_k \subset H_{k,l}^m$  и при этом

$$Z_{k,l}^m(t) = \frac{2t^{(1-k-\nu(m+2))/2}}{B(k/2+1/2, 1/2-\nu-k/2)} \int_0^1 (1-s^2)^{(1-2\nu-k)2-1} s^k Y_k(\tau s) ds, \\ \tau = \frac{2}{m+2}t^{(m+2)/2}.$$

**Следствие 9.** Пусть  $0 < \nu < 1/2$ ,  $1 - 2\nu < k$ ,  $m > -1$  и  $A \in H_{k,l}^m$ . Тогда имеет место вложение  $H_{k,l}^m \subset G_k$  и при этом

$$Y_k(t) = \frac{2^{1-\nu-(k-1)/(m+2)}((m+2)t)^{(k-1)/(m+2)+\nu}}{B(1-\nu, k/2+\nu-1/2)} \times$$





$$\times \int_0^1 (1-s^2)^{(1-2\nu-k)2-1} s^{k+(k-1)/(m+2)+\nu} Z_{k,l}^m \left( \left( \frac{m+2}{2} ts \right)^{\frac{2}{m+2}} \right) ds.$$

**Следствие 10.** Пусть  $0 < \nu < 1/2$ ,  $1 - 2\nu = k$ ,  $m > -1$  и  $A \in G_k$ . Тогда  $H_{k,l}^m = G_k$  и

$$Z_{k,l}^m(t) = t^{-\nu m/2} Y_k(\tau), \quad \tau = \frac{2}{m+2} t^{(m+2)/2}.$$

Приводимое далее следствие вытекает из теорем 1, 2 и формулы сдвига по параметру (10).

**Следствие 11.** Пусть  $0 < \nu < 1/2$ ,  $m > -1$  и  $A \in H_{k,l}^m$ . Тогда имеет место вложение  $H_{k,l}^m \subseteq G_{k,l}^m$  и при этом

$$Y_{k,l}^m(t) = \frac{2t^{\nu(m+2)}}{B(1-\nu, 2\nu)} \int_0^1 (1-s^2)^{2\nu+1} s^{(k-1)/(m+2)-\nu+1} Z_{k,l}^m(ts^{2/(m+2)}) ds. \quad (16)$$

□  $Y_{2\nu+1}(t)$  выражается через  $Y_{1-2\nu}(t)$  при помощи формулы (10)

$$Y_{2\nu+1}(t) = \frac{2}{B(1-\nu, 2\nu)} \int_0^1 (1-s^2)^{2\nu+1} s^{1-2\nu} Y_{1-2\nu}(ts) ds. \quad (17)$$

Учитывая в (17) равенства (6) и (12), получим требуемое соотношение (16). ■

**Третья весовая задача Коши.** В этом пункте мы рассмотрим случай  $0 < \nu < 1/2$ ,  $-2 < m \leq -1$ , не охваченный второй весовой задачей Коши. При постановке третьей весовой задачи Коши мы будем использовать дробную производную Капуто  ${}^C\partial^\alpha u(t)$  порядка  $\alpha$  при  $0 < \alpha < 1$ , которая имеет вид

$${}^C\partial^\alpha u(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} u'(s) ds,$$

где  $\Gamma(\cdot)$  – гамма-функция.

**Теорема 3.** Пусть  $0 < \nu < \frac{1}{2}$ ,  $-2 < m \leq -1$ , оператор  $A \in G_{1/2-\nu}$  и  $u_0 \in D(A)$ . Тогда определяемая равенством (12) функция  $u(t) = Z_{k,l}^m(t)u_0$  удовлетворяет уравнению (4) и начальным условиям

$$\lim_{t \rightarrow 0} (t^{(k-1+\nu(m+2))/2} u(t)) = u_0, \quad \lim_{t \rightarrow 0} {}^C\partial^\alpha (t^{(k-1+\nu(m+2))/2} u(t)) = 0. \quad (18)$$

□ Для доказательства теоремы 3 достаточно проверить справедливость второго условия в (18). Учитывая равенство (9) и начальные условия (2), которым удовлетворяет ОФБ, получим

$$\lim_{t \rightarrow 0} {}^C\partial^\alpha (t^{(k-1+\nu(m+2))/2} u(t)) = \lim_{t \rightarrow 0} {}^C\partial^\alpha Y_{1-2\nu}(\tau)u_0 =$$



$$\begin{aligned}
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\Gamma(1 - \nu(m + 2))} \int_0^t \frac{s^{m+1} Y_{3-2\nu} \left( \frac{2}{m+2} s^{(m+2)/2} \right) Au_0}{(1 - \nu)(m + 2)(t - s)^{\nu(m+2)}} ds = \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^{(1-\nu)(m+2)}}{\Gamma(1 - \nu(m + 2))} \int_0^1 \frac{\xi^{m+1} Y_{3-2\nu} \left( \frac{2}{m+2} (t\xi)^{(m+2)/2} \right) Au_0}{(1 - \nu)(m + 2)(1 - \xi)^{\nu(m+2)}} d\xi = 0. \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

### Литература

1. Глушак А.В. О связи проинтегрированной косинус-оператор-функции с операторной функцией Бесселя // Дифференц. уравнения. – 2006. – 42;5. – С.583-589.
2. Глушак А.В. Задача Коши для абстрактного уравнения Эйлера-Пуассона-Дарбу с генератором проинтегрированной косинус-оператор-функции // Науч. Вед. БелГУ. – 2007. – 6(37);13. – С.3-8.
3. Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. / Н.Н. Лебедев. – М.:Физматгиз, 1963.
4. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций / Г.Н. Ватсон. – М.: Иностранная литература, 1949.
5. Глушак А.В. Операторная функция Бесселя // Доклады РАН. – 1997. – 352;5. – С.587-589.

### WEIGHTED CAUCHY PROBLEM FOR ABSTRACT MALMSTEN EQUATIONS

Glushak A.V., Pokruchin O.A.

Belgorod State University,  
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: [glushak@bsu.edu.ru](mailto:glushak@bsu.edu.ru)

**Abstract.** Some formulas related to the Cauchy problem solution for the abstract Malmsten equation with the operator Bessel function are found. The equation contains the integrated cosine operator function.

**Key words:** weighted Cauchy problem, integrated cosine operator function, Bessel operator function.



УДК 517.958:531.72, 517.958:539.3(4)

## МОДЕЛИРОВАНИЕ БЫСТРОПРОТЕКАЮЩИХ ПРОЦЕССОВ ФИЛЬТРАЦИИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ УСРЕДНЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР: ОДНОСКОРОСТНОЙ КОНТИНУУМ<sup>3)</sup>

И.В. Некрасова

Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: [Nekrasova\\_i@bsu.edu.ru](mailto:Nekrasova_i@bsu.edu.ru)

**Аннотация.** В работе рассматривается линейная система дифференциальных уравнений, описывающая совместное движение упругого пористого тела и вязкой несжимаемой жидкости, заполняющей поры. В предположении периодичности структуры порового пространства и малости характерного времени процесса предлагается строгий вывод усредненных уравнений, которыми являются анизотропные уравнения Стокса для односкоростного континуума. Доказательство основано на методе Нгуэтсенга двухмасштабной сходимости усреднения периодических структур.

**Ключевые слова:** уравнения Стокса, гидравлический разрыв, двухмасштабная сходимость, усреднение периодических структур.

### 1. Введение

В настоящей статье рассматривается задача о совместном движении деформируемого упругого тела, перфорированного системой каналов (пор), заполненных жидкостью. Такие среды называются упругими пористыми средами и являются достаточно хорошим приближением реальных консолидированных грунтов. Твёрдая компонента такой среды называется скелетом грунта, а область занятая жидкостью – поровым пространством. В безразмерных (не отмеченных штрихами) переменных

$$\mathbf{x}' = L\mathbf{x}, \quad t' = \tau t, \quad \mathbf{w}' = \frac{L^2}{g\tau^2}\mathbf{w}, \quad \rho'_s = \rho_0\rho_s, \quad \rho'_f = \rho_0\rho_f, \quad \mathbf{F}' = g\mathbf{F},$$

дифференциальные уравнения модели для безразмерного вектора перемещений  $\mathbf{w}$  в области  $\Omega \in \mathbf{R}^3$  имеют вид:

$$\bar{\rho} \frac{\partial^2 \mathbf{w}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \mathbb{P} + \bar{\rho} \mathbf{F}, \quad (1)$$

$$\mathbb{P} = \bar{\chi} \alpha_\mu \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} \right) + (1 - \bar{\chi}) \alpha_\lambda \mathbb{D}(x, \mathbf{w}) - p \mathbb{I}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{w} = 0, \quad (3)$$

<sup>3)</sup>Работа поддержана РФФИ (грант 03-01-11111).



$$p = \bar{\chi}p_f + (1 - \bar{\chi})p_s. \quad (4)$$

Здесь и далее мы будем обозначать

$$\mathbb{D}(x, \mathbf{u}) = (1/2) (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T), \quad \bar{\rho} = \bar{\chi}\rho_f + (1 - \bar{\chi})\rho_s,$$

$\mathbb{I}$  – единичный тензор,  $p_f$  – давление жидкости,  $p_s$  – давление в твердом скелете,  $L$  – характерный макроскопический размер (размер рассматриваемой области),  $\tau$  – характерное время процесса,  $\rho_f$  и  $\rho_s$  – средние безразмерные плотности жидкой и твердой фаз (отнесенные плотности воды  $\rho_0$ ) соответственно,  $g$  – величина ускорения силы тяжести. Характеристическая функция порового пространства  $\bar{\chi}(\mathbf{x})$  и вектор удельных массовых сил  $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$  считаются известными.

Заметим, что предположение о несжимаемости жидкости автоматически влечет несжимаемость твёрдого скелета, поскольку скорость звука в твёрдой среде в несколько раз больше скорости звука в жидкости. А как известно, мерой несжимаемости (сжимаемости) является скорость звука – менее сжимаемая среда обладает большей скоростью звука. В силу этого уравнения неразрывности для жидкой и твердой компонент среды можно записать в виде одного уравнения (1.3), справедливого всюду в области  $\Omega$ .

Дифференциальные уравнения (1)–(4) означают, что скорость  $\mathbf{v} = \partial \mathbf{w} / \partial t$  удовлетворяет уравнениям Стокса в поровом пространстве  $\Omega_f$ , а вектор перемещений  $\mathbf{w}$  удовлетворяет уравнениям Ламэ в твёрдом скелете  $\Omega_s$ .

На границе  $\Gamma$  "твёрдый скелет – поровое пространство" вектор перемещений  $\mathbf{w}$  и давление жидкости  $p_f$  удовлетворяют условиям непрерывности перемещений

$$[\mathbf{w}](\mathbf{x}_0, t) = 0, \quad \mathbf{x}_0 \in \Gamma, \quad t \geq 0 \quad (5)$$

и нормальных напряжений

$$[\mathbb{P} \cdot \mathbf{n}](\mathbf{x}_0, t) = 0, \quad \mathbf{x}_0 \in \Gamma, \quad t \geq 0, \quad (6)$$

где  $\mathbf{n}(\mathbf{x}_0)$  – вектор единичной нормали к границе в точке  $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$  и

$$[\varphi](\mathbf{x}_0, t) = \varphi_{(s)}(\mathbf{x}_0, t) - \varphi_{(f)}(\mathbf{x}_0, t),$$

$$\varphi_{(s)}(\mathbf{x}_0, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in \Omega_s}} \varphi(\mathbf{x}, t), \quad \varphi_{(f)}(\mathbf{x}_0, t) = \lim_{\substack{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{x} \in \Omega_f}} \varphi(\mathbf{x}, t).$$

Для простоты изложения считаем, что область  $\Omega$  есть единичный куб  $(0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^3$ .

Задача замыкается однородными начальными и граничными условиями

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (7)$$

$$\mathbf{w}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_1, \quad (8)$$

$$(\mathbb{P} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2, \quad (9)$$



где

$$S_2 = \{0 < x_1 < 1, 0 < x_2 < 1, x_3 = 1\},$$

$$\bar{S}_1 \cup \bar{S}_2 = S = \partial\Omega.$$

Безразмерные постоянные  $\alpha_\mu$  и  $\alpha_\lambda$  определяются формулами

$$\alpha_\mu = \frac{2\mu\tau}{L^2\rho_0}, \quad \alpha_\lambda = \frac{2\lambda\tau^2}{L^2\rho_0},$$

где  $\mu$  – вязкость жидкости,  $\lambda$  – упругая постоянная Ламэ.

Математическая модель (1)–(9) общепринята и содержит естественный малый параметр  $\varepsilon$ , которым является отношение среднего размера пор  $l$  к характерному размеру  $L$  рассматриваемой области:

$$\varepsilon = \frac{l}{L}.$$

Пусть выполнено следующее

**Предположение 1.1.** Область  $\Omega = (0, 1)^3$  есть периодическое повторение элементарной ячейки  $Y^\varepsilon = \varepsilon Y$ , где  $Y = (0, 1)^3$  и величина  $1/\varepsilon$  есть целое число так, что  $\Omega$  всегда содержит целое число элементарных ячеек  $Y^\varepsilon$ . Пусть  $Y_s$  есть "твёрдая" часть  $Y$ , и ее "жидкая" часть  $Y_f$  есть открытое дополнение  $Y_s$  в  $Y$  и граница  $\gamma = \partial Y_f \cap \partial Y_s$  между "жидкой" и "твёрдой" компонентами есть липшицева поверхность.

Поровое пространство  $\Omega_f^\varepsilon$  есть периодическое повторение элементарной ячейки  $\varepsilon Y_f$ , твёрдый скелет  $\Omega_s^\varepsilon$  есть периодическое повторение элементарной ячейки  $\varepsilon Y_s$  а граница  $\Gamma^\varepsilon = \partial\Omega_s^\varepsilon \cap \partial\Omega_f^\varepsilon$  есть периодическое повторение в  $\Omega$  границы  $\varepsilon\gamma$ . Твёрдый скелет  $\Omega_s^\varepsilon$  и "поровое пространство"  $\Omega_f^\varepsilon$  являются связными множествами.

$$\bar{\chi}(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi(\mathbf{x}/\varepsilon),$$

$$\bar{\rho} = \rho^\varepsilon(\mathbf{x}) = \chi^\varepsilon(\mathbf{x})\rho_f + (1 - \chi^\varepsilon(\mathbf{x}))\rho_s,$$

где  $\chi(\mathbf{y})$  – характеристическая функция  $Y_f$  в  $Y$ .

Нашей целью является нахождение предельного режима (усредненных уравнений) точной модели (1.1)–(1.9) при  $\varepsilon \searrow 0$  в случае, когда

$$0 < \mu_0 < \infty, \quad \lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = \infty,$$

где

$$\mu_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\mu(\varepsilon), \quad \lambda_0 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \alpha_\lambda(\varepsilon), \quad \lambda_1 = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\alpha_\lambda}{\varepsilon^2}.$$

Отметим, что данный случай возникает при описании быстро протекающих физических процессов таких, например, как гидро-разрыв нефтяного пласта, когда длительность процесса исчисляется долями секунд. Случай условий Дирихле был рассмотрен в [1]. Там же можно найти соответствующую библиографию.



## 2. Формулировка основных результатов

Существуют различные эквивалентные в смысле теории распределений формы записи уравнений (1) в каждой из областей  $\Omega_f^\varepsilon$  и  $\Omega_s^\varepsilon$  и краевых условий (5)–(6) на границе  $\Gamma^\varepsilon$  между поровым пространством  $\Omega_f^\varepsilon$  и твёрдым скелетом  $\Omega_s^\varepsilon$ . Для нас будет удобной запись в виде интегральных тождеств.

Назовём функции  $(\mathbf{w}^\varepsilon, p^\varepsilon)$  обобщённым решением задачи (1)–(9), если они удовлетворяют условиям регулярности

$$\mathbf{w}^\varepsilon, \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w}^\varepsilon), p^\varepsilon \in L^2(\Omega_T) \tag{10}$$

в области  $\Omega_T = \Omega \times (0, T)$ , граничному условию (8), уравнению неразрывности

$$\operatorname{div} \mathbf{w}^\varepsilon = 0 \tag{11}$$

почти всюду в области  $\Omega_T$ , интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_T} \left( \rho^\varepsilon \mathbf{w}^\varepsilon \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} - \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w}^\varepsilon) : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \frac{\partial \varphi}{\partial t}) - \rho^\varepsilon \mathbf{F} \cdot \varphi + \right. \\ & \left. + \left( (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{w}^\varepsilon) - p^\varepsilon \mathbb{I} \right) : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \varphi) \right) d\mathbf{x} dt = 0, \end{aligned} \tag{12}$$

для всех гладких вектор-функций  $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$  таких, что

$$\varphi(\mathbf{x}, t) = 0, \mathbf{x} \in S_1, t > 0; \quad \varphi(\mathbf{x}, T) = \frac{\partial \varphi}{\partial t}(\mathbf{x}, T) = 0, \mathbf{x} \in \Omega.$$

Очевидно, что давление  $p^\varepsilon$  определяется с точностью до аддитивной постоянной. Фиксируем эту постоянную условием

$$\int_{\Omega} p^\varepsilon d\mathbf{x} = 0. \tag{13}$$

В (12) через  $A : B$  обозначена свертка двух тензоров второго ранга по обоим индексам, т.е.  $A : B = \operatorname{tr}(B^* \circ A) = \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} B_{ji}$ .

**Теорема 1.** Пусть функции  $\mathbf{F}, \partial \mathbf{F} / \partial t$  ограничены в  $L^2(\Omega_T)$ :

$$\int_{\Omega_T} \left( |\mathbf{F}|^2 + \left| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right|^2 \right) d\mathbf{x} dt \leq F^2.$$

Тогда при всех  $\varepsilon > 0$  на произвольном интервале времени  $[0, T]$  существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(9) и справедливы оценки

$$\sqrt{\alpha_\mu} \left\| \chi^\varepsilon \mathbb{D} \left( \mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) \right\|_{2,\Omega} + \sqrt{\alpha_\lambda} \left\| (1 - \chi^\varepsilon) \mathbb{D} \left( \mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right) \right\|_{2,\Omega} \leq C_0 F^2, \tag{14}$$



$$\sqrt{\alpha_\mu} \left\| \chi^\varepsilon \mathbb{D} \left( \mathbf{x}, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t) \right) \right\|_{2, \Omega_T} + \left\| \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t) \right\|_{2, \Omega} + \|p^\varepsilon(t)\|_{2, \Omega} \leq C_0 F^2, \quad (15)$$

где  $C_0$  не зависит от малого параметра  $\varepsilon$  и  $t \in [0, T]$ .

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда:

1) для функций  $\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t$  существует продолжение  $\mathbf{v}^\varepsilon$  из  $\Omega_f^\varepsilon \times (0, T)$  в  $\Omega_T$  и

$$\|\mathbf{v}^\varepsilon(t)\|_{2, \Omega} \leq C_0 \left\| \chi^\varepsilon \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{2, \Omega}, \quad \left\| \frac{\partial \mathbf{v}^\varepsilon}{\partial t}(t) \right\|_{2, \Omega} \leq C_0 \left\| \chi^\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2}(t) \right\|_{2, \Omega},$$

$$\int_{\Omega} |\mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{v}^\varepsilon)|^2 dx \leq C_0 \int_{\Omega} \chi^\varepsilon \left| \mathbb{D} \left( \mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 dx,$$

$$\int_{\Omega_T} \left| \mathbb{D} \left( \mathbf{x}, \frac{\partial \mathbf{v}^\varepsilon}{\partial t} \right) \right|^2 dx dt \leq C_0 \int_{\Omega_T} \chi^\varepsilon \left| \mathbb{D} \left( \mathbf{x}, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right) \right|^2 dx dt,$$

где  $C_0$  не зависит от малого параметра  $\varepsilon$  и  $t \in [0, T]$ ;

2) существует подпоследовательность из  $\{\varepsilon > 0\}$  и 1 – периодические по переменной  $\mathbf{y}$  функции  $\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$  и  $P(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)$ , такие что последовательности  $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$  и  $\{\partial \mathbf{v}^\varepsilon / \partial t\}$  сходятся сильно в  $L^2(\Omega_T)$  и слабо в  $L^2((0, T); W_2^1(\Omega))$  к функциям  $\mathbf{v}$  и  $\partial \mathbf{v} / \partial t$  соответственно, а последовательности  $\{\mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{v}^\varepsilon)\}$  и  $\{\mathbb{D}(\mathbf{x}, \partial \mathbf{v}^\varepsilon / \partial t)\}$  сходятся двухмасштабно в  $L^2(\Omega_T)$  к функциям  $\mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) + \mathbb{D}(\mathbf{y}, \mathbf{U})$  и  $\mathbb{D}(\mathbf{x}, \partial \mathbf{v} / \partial t) + \mathbb{D}(\mathbf{y}, \partial \mathbf{U} / \partial t)$  соответственно;

3) последовательности  $\{\partial \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t\}$  и  $\{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t^2\}$  сходятся двухмасштабно в  $L^2(\Omega_T)$  к функциям  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  и  $\partial \mathbf{v} / \partial t(\mathbf{x}, t)$  соответственно;

4) последовательности  $\{p^\varepsilon\}$ ,  $\{\chi^\varepsilon p^\varepsilon\}$  и  $\{(1 - \chi^\varepsilon) p^\varepsilon\}$  сходятся слабо в  $L^2(\Omega_T)$  к функциям  $p = p_f + p_s$ ,  $p_f$  и  $p_s$  соответственно и двухмасштабно в  $L^2(\Omega_T)$  к функциям  $P$ ,  $\chi(\mathbf{y})P$  и  $(1/(1 - m))(1 - \chi(\mathbf{y}))p_s(\mathbf{x}, t)$  соответственно;

5) функция  $\mathbf{v}$  обращается в ноль на части  $S_1$  границы  $S$ , то есть

$$\int_0^T \int_{S_1} |\mathbf{v}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{n}, t)| d\sigma dt \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0,$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор единичной нормали к границе  $S_1$  в точке  $\mathbf{x}$ .

**Теорема 3.** Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда слабые и сильные пределы  $p_f$ ,  $p_s$  и  $\mathbf{v}$  удовлетворяют в  $\Omega_T$  начально-краевой задаче

$$\hat{\rho} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div} \tilde{\mathbb{P}} + \hat{\rho} \mathbf{F}, \quad (16)$$

$$\tilde{\mathbb{P}} = \mu_0 \mathbb{A}_0^f : \mathbb{D}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) - p \mathbb{I}, \quad (17)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (18)$$

где  $\hat{\rho} = m \rho_f + (1 - m) \rho_s$ ,  $m = \int_Y \chi dy$  – пористость среды.



Симметричный строго положительно определенный постоянный тензор четвертого ранга  $\mathbb{A}_0^f$  дается ниже формулой (45).

Дифференциальные уравнения (16) замыкаются однородными краевыми и начальными условиями

$$v(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega;$$

$$v(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_1, \quad (\tilde{\mathbb{P}} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2, \quad t > 0. \quad (19)$$

### 3. Доказательство теоремы 1

Оценки (14) и (15) для перемещений следуют из энергетического тождества в форме

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left( \int_{\Omega} \rho^\varepsilon \left( \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right)^2 dx + \alpha_\lambda \int_{\Omega} (1 - \chi^\varepsilon) \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) : \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) dx \right) \\ & + \alpha_\mu \int_{\Omega} \chi^\varepsilon \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right) : \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} \right) dx = \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} dx. \end{aligned} \quad (20)$$

Последнее получается после дифференцирования уравнения для  $\mathbf{w}^\varepsilon$  по времени, умножения на  $\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon / \partial t^2$  и интегрирования по частям. Заметим, что все слагаемые на границе  $\Gamma^\varepsilon$  «твёрдый скелет – поровое пространство» исчезают, благодаря граничным условиям (5)–(6). Используя неравенства Гёльдера и Гронуолла в (20), получаем требуемые оценки (14) и (15) для перемещений. Эти же оценки гарантирует существование и единственность обобщенного решения задачи (1)–(9). Для этого достаточно воспользоваться методом Галеркина, рассмотрев в качестве базового пространство соленоидальных функций из  $W_2^1(\Omega)$ , удовлетворяющих условию (8), а в качестве базиса – любой базис, ортонормированный в скалярном произведении пространства  $L^2(\Omega)$ .

Для оценки давлений мы используем интегральное тождество (12) в форме

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} p^\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} dx = \\ & \int_{\Omega} \left( \rho^\varepsilon \left( \frac{\partial^2 \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t^2} - \mathbf{F} \right) \cdot \boldsymbol{\psi} + \left( \chi^\varepsilon \alpha_\mu \mathbb{D} \left( x, \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) + (1 - \chi^\varepsilon) \alpha_\lambda \mathbb{D} \left( x, \mathbf{w}^\varepsilon \right) \right) : \mathbb{D}(x, \boldsymbol{\psi}) \right) dx, \end{aligned}$$

Рассматривая давление  $p^\varepsilon$  как линейный функционал на пространстве  $\overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ , мы получаем

$$\left| \int_{\Omega} p^\varepsilon \operatorname{div} \boldsymbol{\psi} dx \right| \leq C_0 \max_{0 \leq t \leq T} \|\boldsymbol{\psi}(t)\|_{W_2^1(\Omega)},$$

где  $C_0$  не зависит от малого параметра  $\varepsilon$ .

Выбирая функцию  $\boldsymbol{\psi}$  такой, что  $\operatorname{div} \boldsymbol{\psi} = p^\varepsilon$ , мы получаем

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\operatorname{div} \boldsymbol{\psi}(t)\|_{\Omega}^2 = \max_{0 \leq t \leq T} \|p^\varepsilon(t)\|_{\Omega}^2 \leq C_0 \max_{0 \leq t \leq T} \|\boldsymbol{\psi}(t)\|_{W_2^1(\Omega)}. \quad (21)$$





Такой выбор  $\psi$  всегда возможен (см. [2]), если положить

$$\psi = \nabla\varphi + \psi_0,$$

где

$$\Delta\varphi = p^\varepsilon, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \varphi = 0, \quad \mathbf{x} \in S, \quad (22)$$

$$\operatorname{div}\psi_0 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \psi_0 = -\nabla\varphi, \quad \mathbf{x} \in S. \quad (23)$$

Продолжая решение  $\varphi$  задачи (22) как нечетную функцию на границе  $S$  мы получаем

$$\varphi \in \overset{\circ}{W}_2^2(\Omega) \quad \text{и} \quad \max_{0 \leq t \leq T} \|\nabla\varphi(t)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \max_{0 \leq t \leq T} \|p^\varepsilon(t)\|_\Omega.$$

Далее, рассматриваем решение  $\psi_0$  задачи (23) как решение системы Стокса:

$$\Delta\psi_0 + \nabla q = 0, \quad \operatorname{div}\psi_0 = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega$$

с неоднородным граничным условием

$$\psi_0 = -\nabla\varphi, \quad \mathbf{x} \in S.$$

Задача имеет единственное решение, такое что

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\psi_0(t)\|_{W_2^1(\Omega)} \leq C \max_{0 \leq t \leq T} \|\nabla\varphi(t)\|_{W_2^1(\Omega)},$$

тогда и только тогда, когда

$$\int_\Omega \operatorname{div}(\nabla\varphi) dx \equiv \int_\Omega \Delta\varphi dx = \int_\Omega p^\varepsilon dx = 0.$$

Справедливость последнего следует из условия (13). Используя все оценки, мы получим желаемые ограничения для давления  $p^\varepsilon$ . В итоге, благодаря тому, что произведение двух функций  $p^\varepsilon$  и  $(1 - \chi^\varepsilon)p^\varepsilon$  равно нулю, приходим к ограниченности каждого из давлений.

#### 4. Доказательство теоремы 2

Первое утверждение теоремы есть результат работы [3].

Оценки (14) и (15) Теоремы 1 и теорема Нгуетсенга [4] доказывают второе утверждение теоремы.

Третье утверждение теоремы вытекает из следующей леммы.

**Лемма 4.1.** Слабые и двухмасштабные пределы последовательностей  $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$  и  $\{\partial\mathbf{w}^\varepsilon/\partial t\}$  совпадают.

□ Пусть  $\Psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  – произвольная гладкая функция периодическая по  $\mathbf{y}$ . Последовательность  $\{\sigma_{ij}^\varepsilon\}$ , где

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = \int_\Omega \sqrt{\alpha\lambda} \frac{\partial^2 w_i^\varepsilon}{\partial x_j \partial t}(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}/\varepsilon) dx, \quad \mathbf{w}^\varepsilon = (w_1^\varepsilon, w_2^\varepsilon, w_3^\varepsilon)$$

равномерно ограничена по  $\varepsilon$ . Следовательно,

$$\int_{\Omega} \varepsilon \frac{\partial^2 w_i^\varepsilon}{\partial x_j \partial t}(\mathbf{x}, t) \Psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}/\varepsilon) dx = \frac{\varepsilon}{\sqrt{\alpha_\lambda}} \sigma_{ij}^\varepsilon \rightarrow 0$$

при  $\varepsilon \searrow 0$ , что эквивалентно следующему:

$$\int_{\Omega} \int_Y \frac{\partial W_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) \frac{\partial \Psi}{\partial y_j}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) dx dy = 0, \quad \mathbf{W} = (W_1, W_2, W_3),$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t}(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t}(\mathbf{x}, t).$$

Переходя к двухмасштабному пределу при  $\varepsilon \searrow 0$  в равенстве

$$\chi^\varepsilon \left( \mathbf{v}^\varepsilon - \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \right) = 0$$

мы приходим к утверждению леммы. ■

Пятое утверждение теоремы есть следствие леммы:

**Лемма 4.2.** Пусть функции

$$\mathbf{v}^\varepsilon \in L^2(0, T; W_2^1(\Omega))$$

и  $\mathbf{v}^\varepsilon = 0$  в части  $\sigma^\varepsilon = S_0 \cap S_f^\varepsilon \subset S_f^\varepsilon = \partial\Omega_f^\varepsilon \cap \partial\Omega$  границы  $S = \partial\Omega$ , последовательность  $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$  сходится слабо в  $L^2(0, T; W_2^1(\Omega))$  к функции  $\mathbf{v}$ .

Тогда  $\mathbf{v} = 0$  в части  $S_0$  границы  $S$ , то есть

$$\int_0^T \int_{S_0} |\mathbf{v}(\mathbf{x} + \delta \mathbf{n}, t)| d\sigma dt \rightarrow 0 \quad \text{при } \delta \rightarrow 0,$$

где  $\mathbf{n}$  – вектор единичной нормали к границе  $S$  в точке  $\mathbf{x}$ .

□ В качестве упрощающего допущения примем  $S_0 = S \cap \{x_3 = 0\}$ . Пусть  $\varphi(\mathbf{x}', t) = \varphi(x_1, x_2, t)$  – гладкая финитная в  $S_0$  вектор-функция. Утверждение леммы эквивалентно тождеству

$$\int_0^T \int_{\Omega} \varphi \left( \mathbf{v} \frac{d\psi}{dx_3} + \psi \frac{d\mathbf{v}}{dx_3} \right) dx dt = 0 \tag{24}$$

для некоторой гладкой функции  $\psi = \psi(x_3)$ , такой что

$$\psi \equiv 1 \quad \text{при } x_3 = 0 \quad \text{и} \quad \psi \equiv 0 \quad \text{при } x_3 = 1.$$

Это следует из очевидного тождества

$$\int_0^T \int_{\Omega} \varphi \left( \mathbf{v}^\varepsilon \frac{d\psi}{dx_3} + \psi \frac{d\mathbf{v}^\varepsilon}{dx_3} \right) dx dt = - \int_0^T \int_{S_0} \varphi \mathbf{v}^\varepsilon d\sigma dt \equiv J^\varepsilon,$$



если мы покажем, что

$$J^\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Для этого рассмотрим все подобласти  $\Omega_{(k)}^\varepsilon = \varepsilon Y + \mathbf{x}^{(k)}$ , прилегающие к границе  $S_0$ . Пусть

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{y}, t) = \mathbf{v}^\varepsilon(\mathbf{x}, t), \quad \text{где} \quad \mathbf{x} = \varepsilon \mathbf{y} + \mathbf{x}^{(k)}.$$

По условию леммы существует прямоугольник

$$\sigma_0 = \{\mathbf{y}' : \alpha_1 < y_1 < \beta_1, \alpha_2 < y_2 < \beta_2\},$$

такой что  $\tilde{\mathbf{v}} = 0$  на  $\sigma_0$ . Пусть

$$Q = \{\mathbf{y} : \alpha_1 < y_1 < \beta_1, \alpha_2 < y_2 < \beta_2, 0 < y_3 < 1\}.$$

Тогда действует неравенство Пуанкаре-Фридрихса

$$\int_Q |\tilde{\mathbf{v}}|^2 d\mathbf{y} \leq \int_Q |\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}|^2 d\mathbf{y}. \quad (25)$$

Далее мы рассматриваем параллелепипед

$$G = \{\mathbf{y} : \alpha_1 < y_1 < \beta_1, 0 < y_2 < 1, 0 < y_3 < 1\}.$$

Интегрируя равенство

$$|\tilde{\mathbf{v}}|^2(\mathbf{y}) = |\tilde{\mathbf{v}}|^2(y_1, \xi, y_3) + 2 \int_{y_2}^\xi \tilde{\mathbf{v}}(y_1, s, y_3) \frac{\partial \tilde{\mathbf{v}}}{\partial y_2}(y_1, s, y_3) ds$$

по переменной  $\xi$  в интервале  $(\alpha_2, \beta_2)$ , затем по переменной  $y_1$  в интервале  $(\alpha_1, \beta_1)$ , затем по переменным  $y_2$  и  $y_3$  в интервале  $(0, 1)$  и оценивая правую часть с использованием неравенства Гёльдера и (25) получим

$$\int_G |\tilde{\mathbf{v}}|^2 d\mathbf{y} \leq C \int_G |\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}|^2 d\mathbf{y}.$$

Повторяя последнюю процедуру еще раз для переменной  $y_1$ , получим

$$\int_Y |\tilde{\mathbf{v}}|^2 d\mathbf{y} \leq C \int_Y |\nabla_{\mathbf{y}} \tilde{\mathbf{v}}|^2 d\mathbf{y}. \quad (26)$$

Возвращаясь к исходным переменным, имеем

$$\int_{\Omega_{(k)}^\varepsilon} |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} \leq C\varepsilon^2 \int_{\Omega_{(k)}^\varepsilon} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}|^2 d\mathbf{x}. \quad (27)$$

Пусть  $Q^\varepsilon$  – объединение всех  $\Omega_{(k)}^\varepsilon$ , прилегающих к границе  $S_0$ . Тогда

$$\int_{Q^\varepsilon} |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} \leq C\varepsilon^2 \int_{Q^\varepsilon} |\nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{v}|^2 d\mathbf{x}. \quad (28)$$



Как и в предыдущем случае, рассматривая представление

$$|\mathbf{v}^\varepsilon|^2(\mathbf{x}', 0) = |\mathbf{v}^\varepsilon|^2(\mathbf{x}', x_3) + 2 \int_0^{x_3} \mathbf{v}(\mathbf{x}', s) \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3}(\mathbf{x}', s) ds,$$

покажем, что

$$\varepsilon \int_{S_0} |\mathbf{v}^\varepsilon|^2 d\mathbf{x}' \leq \int_{Q^\varepsilon} |\mathbf{v}^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} + 2\varepsilon \left( \int_{Q^\varepsilon} |\mathbf{v}^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{Q^\varepsilon} |\nabla_x \mathbf{v}^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} \right)^{\frac{1}{2}}$$

или, учитывая (28),

$$\int_{S_0} |\mathbf{v}^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} \leq C\varepsilon \int_{Q^\varepsilon} |\nabla_x \mathbf{v}^\varepsilon|^2 d\mathbf{x}.$$

Следовательно

$$|J^\varepsilon| \leq \left( \int_0^T \int_{S_0} |\mathbf{v}^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^T \int_{S_0} |\varphi|^2 d\mathbf{x} dt \right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left( \varepsilon \int_0^T \int_{Q^\varepsilon} |\nabla_x \mathbf{v}^\varepsilon|^2 d\mathbf{x} dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

и

$$J^\varepsilon \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Далее покажем, что тождество (24) включает в себе утверждение леммы. Полагаем

$$u(x_3) = \int_0^T \int_{S_0} \varphi(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}' dt.$$

Тогда имеем

$$\int_0^1 \left( u(s) \frac{d\psi}{ds}(s) + \psi \frac{du}{ds}(s) \right) ds = 0. \quad (29)$$

Заметим, что функция  $u$  непрерывна. Следовательно, выбирая в качестве  $\psi$  кусочно-линейную функцию, такую что  $\psi(s) = 1$  при  $0 < s < x_3$ , и  $\psi(s) = 0$  при  $s > x_3 + \delta$ , переходя к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ , получаем следующее равенство

$$u(x_3) = \int_0^{x_3} \frac{du}{ds}(s) ds,$$

или

$$\int_0^T \int_{S_0} \varphi(\mathbf{x}', t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) d\mathbf{x}' dt = \int_0^T \int_0^{x_3} \int_{S_0} \varphi(\mathbf{x}') \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial s}(\mathbf{x}', s, t) d\mathbf{x} dt. \quad (30)$$

Далее, для фиксированного  $x_3$  принимаем  $\varphi = \text{sgn } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Тогда

$$\int_0^T \int_{S_0} |\mathbf{v}(\mathbf{x}', x_3, t)| d\mathbf{x}' dt \leq Cx_3. \quad \blacksquare$$

Наконец, четвертое утверждение теоремы доказывается, наряду с другими утверждениями в нижеследующей лемме.



**Лемма 4.3** Для почти всех  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_T$  и  $\mathbf{y} \in Y$  слабые и двухмасштабные пределы последовательностей  $\{\chi^\varepsilon p^\varepsilon\}$ ,  $\{(1 - \chi^\varepsilon)p^\varepsilon\}$ ,  $\{\mathbf{w}^\varepsilon\}$  и  $\{\mathbf{v}^\varepsilon\}$  удовлетворяют соотношениям

$$P_s = p_s \frac{(1 - \chi)}{(1 - m)}, \quad P_f = \chi P_f, \quad (31)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (32)$$

$$\chi \operatorname{div}_y \mathbf{V} = 0. \quad (33)$$

□ Для доказательства (31), в интегральное тождество (12) подставим пробную функцию вида  $\psi^\varepsilon = \varepsilon \psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}/\varepsilon)$ , где  $\psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  – произвольная 1-периодическая, финитная в области  $Y_s$  функция от  $\mathbf{y}$ . Переходя к пределу при  $\varepsilon \searrow 0$ , мы получим

$$\nabla_y P_s(\mathbf{x}, t, \mathbf{y}) = 0, \quad \mathbf{y} \in Y_s. \quad (34)$$

Далее, осуществляя двухмасштабный предельный переход в равенстве

$$\chi^\varepsilon ((1 - \chi^\varepsilon)p^\varepsilon) = 0,$$

получим

$$\chi P_s = 0,$$

что вместе с (34) доказывает (31).

Для доказательства (32) достаточно рассмотреть уравнение неразрывности в виде

$$\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{w}^\varepsilon}{\partial t} \cdot \nabla \varphi(\mathbf{x}, t) dx dt = 0,$$

справедливое для всякой гладкой финитной в  $\Omega_T$  функции  $\varphi$ , и перейти к пределу при  $\varepsilon \searrow 0$ . Для доказательства (33), достаточно рассмотреть двухмасштабный предел в уравнении (11) при  $\varepsilon \searrow 0$  с пробными функциями вида  $\varepsilon \psi(\mathbf{x}/\varepsilon) h(\mathbf{x}, t)$ , где  $\psi$  и  $h$  – произвольные гладкие функции и учесть (32). ■

## 5. Доказательство теоремы 3

Доказательство теоремы разобьем на ряд независимых утверждений.

**Лемма 4.4.** Для всех  $(\mathbf{x}, t) \in \Omega_T$  выполняется соотношение

$$\operatorname{div}_y \left( \mu_0 \chi(\mathbb{D}(y, \mathbf{V}) + \mathbb{D}(x, \mathbf{v})) - \left( P_f + \frac{(1 - \chi)}{(1 - m)} p_s \right), \mathbb{I} \right) = 0. \quad (35)$$

□ Подставляя пробную функцию вида  $\psi^\varepsilon = \varepsilon \psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{x}/\varepsilon)$ , где  $\psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{y})$  – произвольная 1-периодическая в  $\mathbf{y}$  функция, исчезающая на границе  $S_1$ , в интегральное тождество



(12), и переходя к пределу при  $\varepsilon \searrow 0$ , получим уравнение (35), которое можно также переписать в виде

$$\operatorname{div}_y \left( \chi \left( \mu_0(\mathbb{D}(y, \mathbf{V}) + \mathbb{D}(x, \mathbf{v})) - \left( P_f - \frac{1}{(1-m)} p_s \right) \mathbb{I} \right) \right) = 0. \quad \blacksquare \quad (36)$$

**Лемма 4.5.** Пусть  $\hat{\rho} = m\rho_f + (1-m)\rho_s$ . Тогда функции  $\mathbf{v}$  и  $p$  удовлетворяют в  $\Omega_T$  системе макроскопических уравнений

$$\hat{\rho} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \hat{\rho} \mathbf{F} = \operatorname{div} \{ \mu_0(m\mathbb{D}(x, \mathbf{v}) + \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{V}) \rangle_{Y_f}) - p \cdot \mathbb{I} \}, \quad (37)$$

и однородному начальному условию

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega. \quad (38)$$

□ Уравнения (37) и начальное условие (38) есть результат предельного перехода в тождестве (12) с пробными функциями, не зависящими от  $\varepsilon$  в  $\Omega_T$ . ■

**Лемма 4.6.** Слабые пределы  $\mathbf{v}$ ,  $p_f$  и  $p_s$  удовлетворяют в  $\Omega_T$  начально-краевой задаче

$$\hat{\rho} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \operatorname{div} \tilde{\mathbb{P}} + \hat{\rho} \mathbf{F}, \quad (39)$$

$$\tilde{\mathbb{P}} = \mu_0 \mathbb{A}_0^f : \mathbb{D}(x, \mathbf{v}) - p \mathbb{I}, \quad (40)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (41)$$

где симметричный строго положительно определенный тензор четвертого ранга  $\mathbb{A}_0^f$  определен ниже формулой (45).

Дифференциальные уравнения (39) дополняются однородными начальными и краевыми условиями

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) &= 0, \quad \mathbf{x} \in \Omega; \\ \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= 0, \quad \mathbf{x} \in S_1, \quad (\tilde{\mathbb{P}} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x}, t) = 0, \quad \mathbf{x} \in S_2, \quad t > 0. \end{aligned} \quad (42)$$

□ Усредненные уравнения (39) следуют из макроскопических уравнений (36), после подстановки в них выражения

$$\mu_0 \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{V}) \rangle_{Y_f} = \mu_0 \mathbb{A}_1^f : \mathbb{D}(x, \mathbf{v}).$$

В свою очередь, последняя формула есть результат решения уравнений (33) и (36) на элементарной ячейке  $Y_f$ .

Действительно, полагая

$$\mathbf{V} = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{V}^{(ij)}(\mathbf{y}) D_{ij},$$



$$\left( P_f - \frac{1}{(1-m)} p_s \right) \mathbb{I} = \mu_0 \sum_{i,j=1}^3 P^{ij}(\mathbf{y}) D_{ij},$$

где

$$D_{ij}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}(\mathbf{x}, t) \right),$$

получим следующую периодическую краевую задачу в  $Y$ :

$$\operatorname{div}_y \left( \chi \left( \mathbb{D}(y, \mathbf{V}^{(ij)}) - P^{(ij)} \mathbb{I} + \mathbb{J}^{ij} \right) \right) = 0, \quad (43)$$

$$\chi \operatorname{div}_y \mathbf{V}^{(ij)} = 0. \quad (44)$$

Как следует из предположения о геометрии "жидкой" части ячейки  $Y_f$ , задача (43)–(44) имеет единственное решение, с точностью до постоянного вектора. С целью исключения произвола потребуем, чтобы

$$\langle \mathbf{V}^{(ij)} \rangle_{Y_f} = 0.$$

Таким образом

$$\mathbb{A}_0^f = m \mathbb{J} + \mathbb{A}_1^f, \quad \mathbb{A}_1^f = \sum_{i,j=1}^3 \langle \mathbb{D}(y, \mathbf{V}^{(ij)}) \rangle_{Y_f} \otimes \mathbb{J}^{ij}, \quad (45)$$

Симметричность тензора  $\mathbb{A}_0^f$  следует из симметричности тензора  $\mathbb{A}_1^f$ . Симметричность последнего следует из равенства

$$\langle \mathbb{D}(y, \mathbf{V}^{(ij)}) \rangle_{Y_f} : \mathbb{J}^{kl} = -\langle \mathbb{D}(y, \mathbf{V}^{(ij)}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{V}^{(kl)}) \rangle_{Y_f} \quad (46)$$

которое, в свою очередь, является результатом умножения уравнения (43) для функции  $\mathbf{V}^{(ij)}$  на  $\mathbf{V}^{(kl)}$  и интегрирования по частям.

Это же равенство доставляет нам положительную определенность тензора  $\mathbb{A}_0^f$ . Действительно, пусть  $\mathbb{Z} = (Z_{ij})$  есть произвольная симметричная матрица. Полагая

$$\mathbf{Z} = \sum_{i,j=1}^3 \mathbf{V}^{(ij)} Z_{ij}$$

и учитывая (46) получаем

$$\langle \mathbb{D}(y, \mathbf{Z}) \rangle_{Y_f} : \mathbb{Z} = -\langle \mathbb{D}(y, \mathbf{Z}) : \mathbb{D}(y, \mathbf{Z}) \rangle_{Y_f}.$$

Последнее равенство и определение тензора  $\mathbb{A}_0^f$  дают

$$(\mathbb{A}_0^f : \mathbb{Z}) : \mathbb{Z} = \langle (\mathbb{D}(y, \mathbf{Z}) + \mathbb{Z}) : (\mathbb{D}(y, \mathbf{Z}) + \mathbb{Z}) \rangle_{Y_f}.$$



Строгая положительная определенность тензора  $\mathbb{A}_0^f$  следует теперь из вышеприведенного равенства и геометрии элементарной ячейки  $Y_f$ . А именно, положим  $(\mathbb{A}_0^s : \mathbb{Z}) : \mathbb{Z} = 0$  для некоторой матрицы  $\mathbb{Z}$ , такой что  $\mathbb{Z} : \mathbb{Z} = 1$ . Тогда  $(\mathbb{D}(y, \mathbf{Z}) + \mathbb{Z}) = 0$ , что возможно если, и только если  $\mathbf{Z}$  – линейная функция переменной  $\mathbf{y}$ . С другой стороны, все линейные периодические функции в  $Y_f$  исчерпываются постоянными. Наконец, нормировка  $\langle \mathbf{V}^{(ij)} \rangle_{Y_f} = 0$  влечет равенство  $\mathbf{Z} = 0$ . Последнее невозможно, поскольку функции  $\mathbf{V}^{(ij)}$  линейно независимы. ■

### Литература

1. Meirmanov A. Homogenized models for a short-time filtration in elastic porous media // EJDE. – 2007. – 18. – P.481-496.
2. Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости / О.А. Ладыженская. – М.: Наука, 1970.
3. Conca C. On the application of the homogenization theory to a class of problems arising in fluid mechanics // J. math. pures et appl. – 1985. – 64. – P.31-75.
4. Nguetseng G. A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization // SIAM J. Math. Anal. – 1989. – 20. – P.608-623.

## MATHEMATICAL MODELING OF SHORT-TIME FILTRATION OF INCOMPRESSIBLE FLUID. THE AVERAGE OF PERIODIC STRUCTURES AND THE ONE-VELOCITY CONTINUUM

I.V. Nekrasova

Belgorod State University,  
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: [Nekrasova\\_i@bsu.edu.ru](mailto:Nekrasova_i@bsu.edu.ru)

**Abstract.** The linear system of differential equations describing the joint motion of elastic porous body and the viscous incompressible fluid that occupies its porous space. We suppose that the porous space is periodical and the characteristic time of process is small enough. It is proposed the deduction of averaged equations which are non-isotropic Stokes equations in the one-velocity continuum. Our proof is based on Nguetseng’s two-scale convergence method at the average in periodic structures.

**Key words:** Stokes equations, hydraulic discontinuity, two-scale convergence, homogenization of periodic structures.





УДК 517.91

## ВТОРАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В.А. Остапенко

Днепропетровский национальный университет,  
Днепропетровск, 49010, Украина, e-mail: [victor.ostapenko@yandex.ru](mailto:victor.ostapenko@yandex.ru)

**Аннотация.** Рассмотрена вторая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области. Получено решение этой задачи в квадратурах. Построение точного решения задачи основано на применении метода отражений и на разработанном в [1] методе интегрального представления достаточно широкого класса решений телеграфного уравнения.

**Ключевые слова:** телеграфное уравнение, краевая задача, ограниченная область.

### Введение

Основным математическим аппаратом, описывающим распространение волн различной физической природы в средах, обладающих сопротивлением, является телеграфное уравнение. Использование телеграфного уравнения позволяет учесть реально существующее сопротивление среды и выяснить характер затухания волн, вызванного этим сопротивлением. С целью решения такого рода задач в [1] разработан метод интегрального представления решений телеграфного уравнения с помощью функции Римана. Сочетание такого интегрального представления с методом продолжений позволило получить точное решение второй краевой задачи [2] в полуограниченной области. В ограниченных областях с необходимостью возникают дополнительные волны, являющиеся результатом отражения первичных волн от граничной поверхности. В настоящей статье с помощью комбинации интегрального представления решений, метода продолжений и метода отражений строится решение первой краевой задачи в ограниченной области. Учтено, что если краевые условия на обеих границах области неоднородны, краевую задачу можно разбить на две вспомогательные задачи, в каждой из которых неоднородным является только одно краевое условие. Поэтому, не нарушая общности, достаточно рассмотреть вторую краевую задачу с одним неоднородным краевым условием.

### 1. Постановка задачи

Рассматривается следующая краевая задача: в области  $0 < x - x_n < l$ ,  $t > t_n$  требуется найти решение телеграфного уравнения

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{a^2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + D \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + B \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + Cu(x, t) = 0 \quad (1)$$



с постоянными  $a^2, B, C, D$ , удовлетворяющее начальным условиям

$$u(x, t_n) = 0; \quad u_t(x, t_n) = 0, \quad 0 < x - x_n < l \quad (2)$$

и краевым условиям второго типа

$$u_x(x_n, t) = \nu(t - t_n); \quad u_x(x_n + l, t) = 0, \quad t > t_n. \quad (3)$$

## 2. Решение задачи

Для решения этой задачи применяется метод, разработанный в [3,4]. Решение поставленной задачи основано на установленном в [1] факте, что в случае краевых условий второго типа решением дифференциального уравнения (1) является функция

$$u(x, t) = e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_{t-t_n+\frac{x-x_n}{a}}^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \omega(\eta) d\eta$$

с произвольной функцией  $\omega(\eta)$ . Здесь  $J_0(z)$  – функция Бесселя нулевого порядка,

$$z = \sqrt{c_1[(x - x_n)^2 - a^2((t - t_n) - \eta)^2]}; \quad (4)$$

$$c_1 = C + \frac{D^2 a^2}{4} - \frac{B^2}{4}. \quad (5)$$

Функция  $\omega(\eta)$  должна быть определена на всей числовой оси. Так как в краевом условии (3) функция  $\nu(t)$  определена лишь на полуоси, необходимо построить ее продолжение на всю ось  $t$ . Учитывая нулевые начальные условия (2) для  $\nu(t)$ , продолжение функции  $\nu(t)$  на всю ось  $t$ , с необходимостью, выглядит следующим образом:

$$N(t - t_n) = \begin{cases} \nu(t - t_n), & t > t_n; \\ 0, & t < t_n. \end{cases} \quad (6)$$

Первое краевое условие (3) также продолжается на всю ось  $t$ :

$$u_x(x_n, t) = N(t - t_n). \quad (7)$$

Учитывая, что, по постановке задачи, волны в среде возбуждаются на левом конце и распространяются в среду в направлении положительных  $x$ , на начальном этапе решение задачи отыскивается в виде функции

$$u(x, t) = 2e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_0(\eta) d\eta \quad (8)$$

с неизвестной функцией  $N_0(\eta)$ . Здесь  $z$  и  $c_1$  определяются формулами (4) и (5) соответственно. Функция (8) удовлетворяет дифференциальному уравнению (1) при произвольной функции  $N_0(t)$ .



С целью дальнейшего построения решения и для анализа краевого условия (7) вычислим производную по  $x$  от функции более общего вида

$$u(x, t) = 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_n(\eta) d\eta. \quad (9)$$

В результате, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = & -\frac{1}{a} \cdot e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \cdot e^{\frac{Da(x-x_n+2nl)}{2}} J_0(z_n) N_n \left( t - t_n - \frac{x - x_n + 2nl}{a} \right) - \\ & - e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}} \left[ \frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_n(\eta) d\eta. \quad (10) \end{aligned}$$

При вычислении этой производной учтено, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c_1(x - x_n)}{z};$$

$$\frac{\partial J_0(z)}{\partial x} = \frac{dJ_0(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{c_1(x - x_n)}{z} \cdot \frac{dJ_0(z)}{dz} = -\frac{c_1(x - x_n)}{z} J_1(z);$$

так как

$$\frac{dJ_0(z)}{dz} = -J_1(z).$$

В формуле (10)  $z_n$  – значение функции  $z$  при  $\eta = t - t_n - \frac{x-x_n+2nl}{a}$ , то есть

$$\begin{aligned} z_n = & \sqrt{c_1 \left[ (x - x_n)^2 - a^2 \left( (t - t_n) - \left( t - t_n - \frac{x - x_n + 2nl}{a} \right) \right)^2 \right]} = \\ & = \sqrt{c_1 [(x - x_n)^2 - (x - x_n + 2nl)^2]}. \quad (11) \end{aligned}$$

Поэтому с помощью формулы (10), учтя, что при  $\eta = t - t_n - \frac{x-x_n}{a}$   $z = 0$ , а  $J_0(0) = 1$ , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial x} = & -\frac{2}{a} e^{-\frac{(B-Da)(x-x_n)}{2}} N_0 \left( t - t_n - \frac{x - x_n}{a} \right) - \\ & - 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}} \left[ \frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_0(\eta) d\eta. \quad (12) \end{aligned}$$

Подставим теперь форму решения (8) в краевое условие (7) с учетом (12). В результате, получим

$$-\frac{2}{a} N_0(t - t_n) - B \int_0^{t-t_n} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_0(\eta) d\eta = N(t - t_n). \quad (13)$$



В равенстве (13) следует принимать

$$z|_{x=x_n} = a(t - t_n - \eta)\sqrt{-c_1}. \tag{14}$$

Равенство (13) представляет собой интегральное уравнение для определения функции  $N_0$ . Выполним в уравнении (13) преобразование

$$\tau = t - t_n. \tag{15}$$

Тогда уравнение (13) примет вид

$$-\frac{1}{a} N_0(\tau) - \frac{B}{2} \int_0^\tau J_0(a(\tau - \eta)\sqrt{-c_1}) e^{\frac{Da^2(\tau-\eta)}{2}} N_0(\eta) d\eta = \frac{1}{2} N(\tau). \tag{16}$$

Из уравнения (16) и определения (6) функции  $N(\tau)$  следует, что  $N_0(\tau)$  обладает следующим свойством:

$$N_0(\tau) \equiv 0, \quad \tau < 0. \tag{17}$$

В силу свойства (17) функция (6) удовлетворяет начальным условиям (2). Действительно, при  $t = t_n$  из формулы (8) получаем

$$u_0(x, t_n) = 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{-\frac{x-x_n}{a}} J_0(z) e^{-\frac{Da^2\eta}{2}} N_0(\eta) d\eta.$$

При  $x - x_n > 0$  верхний предел интегрирования в этой формуле отрицателен и, следовательно, на основании свойства (17) функции  $N_0(\tau)$ ,  $u_0(x, t_n) = 0$ . Иными словами, функция (8) удовлетворяет первому начальному условию (2). Продифференцируем функцию (9) по  $t$ . В результате, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = & e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \left[ e^{\frac{Da(x-x_n+2nl)}{2}} J_0(z_n) N_n \left( t - t_n - \frac{x - x_n + 2nl}{a} \right) + \right. \\ & \left. + \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}} \left[ \frac{Da^2}{2} J_0(z) + c_1 a^2 \frac{t-t_n-\eta}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_n(\eta) d\eta \right]. \tag{18} \end{aligned}$$

При вычислении этой производной учтено, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= -\frac{c_1 a^2 (t - t_n - \eta)}{z}; \\ \frac{\partial J_0(z)}{\partial t} &= \frac{dJ_0(z)}{dz} \cdot \frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{c_1 a^2 (t - t_n - \eta)}{z} \cdot \frac{dJ_0(z)}{dz} = \frac{c_1 a^2 (t - t_n - \eta)}{z} J_1(z). \end{aligned}$$

С помощью формулы (18) получаем из (8)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0(x, t)}{\partial t} = & 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \left[ e^{\frac{Da(x-x_n)}{2}} N_0 \left( t - t_n - \frac{x - x_n}{a} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n}{a}} \left[ \frac{Da^2}{2} J_0(z) + c_1 a^2 \frac{t-t_n-\eta}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_0(\eta) d\eta \right]. \tag{19} \end{aligned}$$



Из формулы (19) при  $t = t_n$  получаем

$$u_{0,t}(x, t_n) = 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \left[ e^{\frac{Da(x-x_n)}{2}} N_0 \left( -\frac{x-x_n}{a} \right) + \right. \\ \left. + 2 \int_0^{-\frac{x-x_n}{a}} \left[ \frac{Da^2}{2} J_0(z) - c_1 a^2 \frac{\eta}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2 \eta}{2}} N_0(\eta) d\eta \right].$$

В правой части этой формулы при  $x - x_n > 0$  верхний предел интегрирования и аргумент функции  $N_0(\tau)$  отрицательны. Поэтому на основании свойства (17) функции  $N_0(\tau)$   $u_{0,t}(x, t_n) = 0$ . А это значит, что функция (8) удовлетворяет второму начальному условию (2).

Таким образом, функция (8) в области  $0 < x - x_n < l$ ;  $t > t_n$  удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, кроме второго краевого условия (3). С целью проверки выполнения этого условия с помощью (8) и (12) вычислим

$$u_{0,x}(x_n + l, t) = -\frac{2}{a} e^{-\frac{B-Da}{2}l} N_0 \left( t - t_n - \frac{l}{a} \right) - \\ - 2e^{-\frac{B}{2}l} \int_0^{t-t_n-\frac{l}{a}} \left[ \frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_0(\eta) d\eta. \quad (20)$$

Из формулы (20) и свойства (17) функции  $N_0(\tau)$  следует, что функция (8) удовлетворяет второму краевому условию (3) при  $t - t_n < \frac{l}{a}$ . Для выполнимости этого краевого условия при  $t - t_n > \frac{l}{a}$  решение задачи строится в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t), \quad (21)$$

где

$$u_1(x, t) = 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-2l}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} [N_1(\eta) - N_0(\eta)] d\eta \quad (22)$$

с неизвестной функцией  $N_1(\tau)$ . Функция  $u_1(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1) при произвольных функциях  $N_0(\tau)$  и  $N_1(\tau)$ .

С целью дальнейшего построения решения и анализа краевых условий (3) вычислим производную по  $x$  от функции более общего вида

$$u(x, t) = 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n-2nl}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_n(\eta) d\eta. \quad (23)$$

В результате, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = & \frac{1}{a} e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} e^{-\frac{Da(x-x_n-2nl)}{2}} J_0(z_{pn}) N_n \left( t - t_n + \frac{x - x_n - 2nl}{a} \right) - \\ & - e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n + \frac{x-x_n-2nl}{a}} \left[ \frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{x-x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_n(\eta) d\eta. \end{aligned} \quad (24)$$

В формуле (24)  $z_{pn}$  – значение функции  $z$  при  $\eta = t - t_n - \frac{x-x_n-2nl}{a}$ , то есть

$$\begin{aligned} z_{pn} = & \sqrt{c_1 \left[ (x - x_n)^2 - a^2 \left( (t - t_n) - \left( t - t_n + \frac{x - x_n - 2nl}{a} \right) \right)^2 \right]} = \\ & = \sqrt{c_1 [(x - x_n)^2 - (2nl - (x - x_n))^2]}. \end{aligned} \quad (25)$$

Поэтому с помощью формулы (25) получаем из (22)

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1(x, t)}{\partial x} = & \frac{2}{a} e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} e^{\frac{Da(x-x_n-2l)}{2}} J_0(z_{p1}) \left[ N_1 \left( t - t_n + \frac{x - x_n - 2l}{a} \right) - \right. \\ & - N_0 \left( t - t_n + \frac{x - x_n - 2l}{a} \right) \left. \right] - 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n + \frac{x-x_n-2l}{a}} \left[ \frac{B}{2} J_0(z) + \right. \\ & \left. + c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} [N_1(\eta) - N_0(\eta)] d\eta. \end{aligned} \quad (26)$$

Заметив, что при  $n = 1$  и  $x = x_n + l$  из (25) следует  $z_{p1} = 0$ , получаем из (8), (12), (22) и (26), что подстановка функции (21) во второе краевое условие (3) приводит к равенству

$$\begin{aligned} u_x(x_n + l, t) = & -\frac{2}{a} e^{-\frac{B-Da}{2}l} \left[ N_0 \left( t - t_n - \frac{l}{a} \right) - N_1 \left( t - t_n - \frac{l}{a} \right) + N_0 \left( t - t_n - \frac{l}{a} \right) \right] - \\ & - 2e^{-\frac{B}{2}l} \int_0^{t-t_n - \frac{l}{a}} \left[ \frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \times \\ & \times [N_0(\eta) + (N_1(\eta) - N_0(\eta))] d\eta = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

Из (27) следует, что функция (21) будет удовлетворять второму краевому условию



(3) при всех  $t > t_n$ , если функция  $N_1$  будет решением интегрального уравнения

$$N_1\left(t - t_n - \frac{l}{a}\right) - ae^{-\frac{Da}{2}l} \int_0^{t-t_n-\frac{l}{a}} \left[ \frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_1(\eta) d\eta = 2N_0\left(t - t_n - \frac{l}{a}\right). \quad (28)$$

В формуле (28) величину  $z$  следует полагать равной её значению при  $x - x_n = l$ , то есть

$$z|_{x-x_n=l} = \sqrt{c_1[t^2 - a^2(t - t_n - \eta)^2]}. \quad (29)$$

После выполнения преобразования

$$\tau = t - t_n - \frac{l}{a} \quad (30)$$

интегральное уравнение (28) примет вид

$$N_1(\tau) + ae^{-\frac{Da}{2}l} \int_0^\tau \left[ \frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(\tau+l/a-\eta)}{2}} N_1(\eta) d\eta = 2N_0(\tau), \quad (31)$$

где

$$z = \sqrt{c_1[l^2 - a^2(\tau + l/a - \eta)^2]}. \quad (32)$$

Из свойства (17) функции  $N_0(\tau)$  и уравнения (31) следует, что функция  $N_1(\tau)$  обладает свойством

$$N_1(\tau) \equiv 0, \quad \tau < 0. \quad (33)$$

Используя свойства (17) и (33) функций  $N_0(\tau)$  и  $N_1(\tau)$ , так же как и для функции  $u_0(x, t)$ , можно показать, что функция (21) удовлетворяет нулевым начальным условиям (2).

Таким образом, в области  $0 < x - x_n < l, t > t_n$  функция (21) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, кроме первого краевого условия (3). Учитывая, что функция  $u_0(x, t)$  удовлетворяет первому краевому условию (3), нужно, чтобы функция  $u_1(x, t)$  удовлетворяла краевому условию

$$u_{1,x}(x_n, t) = 0, \quad t > t_n. \quad (34)$$

С помощью равенств (22) и (26) получаем

$$u_{1,x}(x_n, t) = \frac{2}{a} e^{Dal} J_0(z_{p1b}) \left[ N_1\left(t - t_n - \frac{2l}{a}\right) - N_0\left(t - t_n - \frac{2l}{a}\right) \right] - B \int_0^{t-t_n-\frac{2l}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} [N_1(\eta) - N_0(\eta)] d\eta. \quad (35)$$



Здесь из формулы (25) получено

$$z_{pnb} = z_{pn}|_{x=x_n} = 2nl\sqrt{-c_1}. \quad (36)$$

Из формулы (35) и свойств (17) и (33) функций  $N_0(\tau)$  и  $N_1(\tau)$  следует, что условие (34) будет выполнено только при  $t - t_n < \frac{2l}{a}$ . Для того чтобы удовлетворить этому условию при  $t - t_n > \frac{2l}{a}$ , решение задачи будем строить в виде суммы трех функций:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t), \quad (37)$$

где

$$u_2(x, t) = 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2l}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} [N_2(\eta) - (N_1(\eta) - N_0(\eta))] d\eta \quad (38)$$

с неизвестной функцией  $N_2(\tau)$ . Функция  $u_2(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1) при произвольных функциях  $N_0(\tau)$ ,  $N_1(\tau)$  и  $N_2(\tau)$ . Сумма функций  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$  должна удовлетворять краевому условию

$$u_{1,x}(x_n, t) + u_{2,x}(x_n, t) = 0, \quad t > t_n. \quad (39)$$

Подставляя в (39) значения функций  $u_1(x, t)$  и  $u_2(x, t)$  из (22) и (38), с учётом равенств (12) и (26) получим

$$\begin{aligned} & \frac{2}{a} J_0(z_{1b}) e^{Dal} \left[ N_1 \left( t - t_n - \frac{2l}{a} \right) - N_0 \left( t - t_n - \frac{2l}{a} \right) - \left[ N_2 \left( t - t_n - \frac{2l}{a} \right) - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \left( N_1 \left( t - t_n - \frac{2l}{a} \right) - N_0 \left( t - t_n - \frac{2l}{a} \right) \right) \right] \right] - \\ & - B \int_0^{t-t_n-\frac{2l}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} [N_1(\eta) - N_0(\eta) + [N_2(\eta) - (N_1(\eta) - N_0(\eta))]] d\eta = 0. \quad (40) \end{aligned}$$

Здесь из формулы (25) получено

$$z_{nb} = z_n|_{x=x_n} = 2nl\sqrt{-c_1} \quad (41)$$

и учтено, что  $z_{pnb} = z_{nb}$ . Таким образом, оказывается, что если функция  $N_2(\tau)$  будет удовлетворять получаемому из (40) интегральному уравнению

$$\begin{aligned} & - N_2 \left( t - t_n - \frac{2l}{a} \right) - \frac{aB}{2J_0(z_{1b})} e^{-Dal} \int_0^{t-t_n-\frac{2l}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_2(\eta) d\eta = \\ & = 2 \left[ N_1 \left( t - t_n - \frac{2l}{a} \right) - N_0 \left( t - t_n - \frac{2l}{a} \right) \right], \quad (42) \end{aligned}$$





то функция (37) будет удовлетворять первому краевому условию (3) при всех  $t > t_n$ . После выполнения преобразования

$$\tau = t - t_n - \frac{2l}{a} \quad (43)$$

интегральное уравнение (42) примет вид

$$\begin{aligned} -N_2(\tau) - \frac{aB}{2J_0(z_{1b})} e^{-Dal} \int_0^\tau J_0\left(a\left(\tau + \frac{2l}{a} - \eta\right)\sqrt{-c_1}\right) e^{\frac{Da^2(\tau + \frac{2l}{a} - \eta)}{2}} N_2(\eta) d\eta = \\ = -2[N_1(\tau) - N_0(\tau)]. \quad (44) \end{aligned}$$

Из уравнения (44) и свойств (17) и (33) функций  $N_0(\tau)$  и  $N_1(\tau)$  следует, что функция  $N_2(\tau)$  обладает свойством

$$N_2(\tau) \equiv 0, \quad \tau < 0. \quad (45)$$

Используя свойства (17), (33) и (45) функций  $N_0(\tau)$ ,  $N_1(\tau)$  и  $N_2(\tau)$ , так же как и для функции  $u_0(x, t)$ , можно показать, что функция (37) удовлетворяет нулевым начальным условиям (2).

Таким образом, в области  $0 < x - x_n < l$ ,  $t > t_n$  функция (37) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, кроме второго краевого условия (3). Учитывая, что функция  $u_0(x, t) + u_1(x, t)$  удовлетворяет второму краевому условию (3), нужно, чтобы функция  $u_2(x, t)$  удовлетворяла краевому условию

$$u_{2,x}(x_n + l, t) = 0, \quad t > t_n. \quad (46)$$

Подстановка функции  $u_2(x, t)$  в левую часть краевого условия (46) с учетом (12) приводит к равенству

$$\begin{aligned} u_{2,x}(x_n + l, t) = -\frac{2}{a} e^{-\frac{B}{2}l} e^{\frac{3Da}{2}l} J_0(z_{1k}) \sum_{i=0}^2 (-1)^i N_i\left(t - t_n - \frac{3l}{a}\right) - \\ - e^{-\frac{B}{2}l} \int_0^{t-t_n-\frac{3l}{a}} \left[\frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{l}{z} J_1(z)\right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^2 (-1)^i N_i(\eta) d\eta. \quad (47) \end{aligned}$$

При  $t - t_n < \frac{3l}{a}$ , ввиду отрицательности аргументов функций  $N_i$  и верхних пределов интегрирования, на основании свойств (17), (33) и (45) функций  $N_i$ , заключаем, что выражение (47) будет равно нулю, то есть функция (37) будет удовлетворять второму краевому условию (3). При  $t - t_n > \frac{3l}{a}$  выражение (47) будет отлично от нуля и с целью удовлетворения второму краевому условию (3) строим решение в виде

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + u_3(x, t), \quad (48)$$

где

$$u_3(x, t) = 2e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-4l}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^3 (-1)^{i+1} N_i(\eta) d\eta \quad (49)$$

с неизвестной функцией  $N_3(\tau)$ . Функция  $u_3(x, t)$  удовлетворяет уравнению (1) при произвольных функциях  $N_0(\tau)$ ,  $N_1(\tau)$ ,  $N_2(\tau)$  и  $N_3(\tau)$ . Сумма функций  $u_3(x, t)$  и  $u_2(x, t)$  должна удовлетворять краевому условию

$$u_{3,x}(x_n + l, t) + u_{2,x}(x_n + l, t) = 0, \quad t > t_n. \quad (50)$$

Подставляя в (50) значения функций  $u_3(x, t)$  и  $u_2(x, t)$  из (49) и (37), с учетом равенств (12) и (24), получим

$$\begin{aligned} & \frac{2}{a} e^{-\frac{B}{2}l} e^{\frac{3Da}{2}l} J_0(z_{1k}) \left[ \sum_{i=0}^3 (-1)^{i+1} N_i \left( t - t_n - \frac{3l}{a} \right) - \sum_{i=0}^2 (-1)^i N_i \left( t - t_n - \frac{3l}{a} \right) \right] - \\ & - 2e^{-\frac{B}{2}l} \int_0^{t-t_n-\frac{3l}{a}} \left[ \frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \times \\ & \times \left[ \sum_{i=0}^3 (-1)^{i+1} N_i(\eta) + \sum_{i=0}^2 (-1)^i N_i(\eta) \right] d\eta = 0. \quad (51) \end{aligned}$$

При построении равенств (47) и (51) использованы получаемые из равенств (11) и (25) величины

$$z_{nk} = z_n|_{x-x_n=l} = \sqrt{c_1[l^2 - (2n+1)^2 l^2]} = l\sqrt{-c_1[(2n+1)^2 - 1]}; \quad (52)$$

$$z_{pk} = z_{pn}|_{x-x_n=l} = \sqrt{c_1[l^2 - (1-2n)^2 l^2]} = l\sqrt{-c_1[(2n-1)^2 - 1]} \quad (53)$$

и учтено также, что как следует из (52) и (53)

$$z_{p,n+1,k} = z_{nk}. \quad (54)$$

Из (51) получаем интегральное уравнение для определения функции  $N_3$ :

$$\begin{aligned} N_3 \left( t - t_n - \frac{3l}{a} \right) - \frac{a}{J_0(z_{1k})} e^{-\frac{3Da}{2}l} \int_0^{t-t_n-\frac{3l}{a}} \left[ \frac{B}{2} J_0(z) + \right. \\ \left. + c_1 \frac{l}{a} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_3(\eta) d\eta = 2 \sum_{i=0}^2 (-1)^i N_i \left( t - t_n - \frac{3l}{a} \right). \quad (55) \end{aligned}$$

В уравнении (55)

$$z = \sqrt{c_1[l^2 - a^2((t-t_n) - \eta)^2]}. \quad (56)$$

Таким образом, если функция  $N_3$  является решением интегрального уравнения(55), функция (48) будет удовлетворять второму краевому условию (3) при всех  $t$ .



Выполнив в уравнении (55) преобразование

$$\tau = t - t_n - \frac{3l}{a}, \quad (57)$$

приведем его к виду

$$N_3(\tau) - \frac{a}{J_0(z_{1k})} e^{-\frac{Da}{2} 3l} \int_0^\tau \left[ \frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{l}{a} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_3(\eta) d\eta = 2 \sum_{i=0}^2 (-1)^i N_i(\tau), \quad (58)$$

где

$$z = \sqrt{c_1 \left[ l^2 - a^2 \left( \tau + \frac{3l}{a} - \eta \right)^2 \right]}. \quad (59)$$

Из свойств (17), (33) и (45) функций  $N_0(\tau)$ ,  $N_1(\tau)$ , и  $N_2(\tau)$ , а также уравнения (58) следует, что функция  $N_3(\tau)$  обладает свойством

$$N_3(\tau) \equiv 0, \quad \tau < 0. \quad (60)$$

В свою очередь, из этих свойств, так же как и для функции  $u_0(x, t)$ , следует, что функция (48) удовлетворяет начальным условиям (2).

Продолжив построение отраженных волн аналогичным способом, мы вправе ожидать, что решением рассматриваемой краевой задачи будет функция

$$u(x, t) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \int_0^{t-t_n-\frac{x-x_n+2nl}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \times \\ \times \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i N_i(\eta) d\eta + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{-B(x-x_n)}{2}} \times \\ \times \int_0^{t-t_n+\frac{x-x_n-2nl}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} N_i(\eta) d\eta, \quad (61)$$

в которой  $N_0(\tau)$  является решением интегрального уравнения (16), а остальные функции  $N_i(\tau)$  являются решениями следующих интегральных уравнений:

$$-N_{2n}(\tau) - \frac{aB}{2J_0(z_{nb})} e^{-Danl} \int_0^\tau J_0 \left( a \left( \tau + \frac{2nl}{a} - \eta \right) \sqrt{-c_1} \right) \times \\ \times N_{2n}(\eta) \exp \left[ \frac{Da^2 \left( \tau + \frac{2nl}{a} - \eta \right)}{2} \right] d\eta = 2 \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i N_i(\tau); \quad (62)$$



$$N_{2n-1}(\tau) - \frac{a}{J_0(z_{nk})} e^{-\frac{Da}{2}(2n-1)l} \int_0^\tau \left[ \frac{B}{2} J_0(z) \right) + \\ + c_1 \frac{l}{a} J_1(z) \Big] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_{2n-1}(\eta) d\eta = 2 \sum_{i=0}^{2(n-1)} (-1)^i N_i(\tau). \quad (63)$$

В уравнениях (63) следует  $z$  брать при  $x = x_n + l$ , то есть

$$z|_{x=x_n+l} = \sqrt{c_1[l^2 - a^2(t - t_n - \eta)^2]} = \sqrt{c_1 \left[ l^2 - a^2 \left( \tau + \frac{2n-1}{a}l - \eta \right)^2 \right]}. \quad (64)$$

Параметр  $\tau$  в уравнениях (62) и (63) имеет соответственно следующие представления:

$$\tau = t - t_n - \frac{2nl}{a}; \quad \tau = t - t_n - \frac{2n-1}{a}l.$$

При этом все функции  $N_n(\tau)$  обладают свойствами

$$N_n(\tau) \equiv 0, \quad \tau < 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (65)$$

В силу этих свойств, при каждом фиксированном  $t - t_n = T$  в формуле (61) отличным от нуля будет конечное число слагаемых. В самом деле, в суммах в формуле (61) каждое из слагаемых при выполнении условий (4), (65) становится равным нулю, если верхний предел интегрирования будет отрицательным. Для первой суммы в формуле (61) условие отрицательности верхнего предела интегрирования при  $t - t_n = T$  имеет вид

$$T - \frac{x - x_n + 2nl}{a} < 0, \quad (66)$$

откуда следует

$$n > \frac{aT}{2l} - \frac{x - x_n}{2l} \quad (67)$$

и, поскольку в области отыскания решения  $x - x_n < l$ , получаем, что при всех  $n$ , удовлетворяющих условию

$$n > \frac{aT}{2l} - \frac{1}{2}, \quad (68)$$

все слагаемые в первой сумме формулы (61) будут равны нулю. Иными словами, суммирование в первой сумме формулы (61) нужно производить в этом случае не до бесконечности, а до  $N - 1$ , где  $N$  - наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (68).

Аналогично, условие отрицательности верхнего предела интегрирования для второй суммы в формуле (61) при  $t - t_n = T$  имеет вид

$$T + \frac{x - x_n - 2nl}{a} < 0, \quad (69)$$



откуда следует

$$n > \frac{aT}{2l} + \frac{x - x_n}{2l}. \quad (70)$$

Поэтому из формулы (70) следует, что при

$$n > \frac{aT}{2l} + \frac{1}{2} \quad (71)$$

все слагаемые во второй сумме формулы (61) будут равны нулю. То есть, суммирование во второй сумме формулы (61) нужно производить в этом случае до  $N_1 - 1$ , где  $N_1$  – наименьшее натуральное число, удовлетворяющее неравенству (71). Все слагаемые в формуле (61) являются решениями уравнения (1). А так как для каждого фиксированного  $t$  число слагаемых в формуле (61) конечно, дифференцирование в формуле (61) можно выполнять почленно. Поэтому функция (61) является решением уравнения (1).

Из формулы (61) непосредственно следует, что при  $t - t_n = 0$  и  $0 < x - x_n < l$  верхние пределы интегрирования всех интегралов становятся отрицательными. Значит, на основании свойств (6) и (65) функций  $N(\tau)$  и  $N_i(\tau)$  получаем из (61)  $u(x, t_n) = 0$ .

Таким образом, функция (61) удовлетворяет первому начальному условию (2). Продифференцируем функцию (61) по  $t$ . Получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = & 2 \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \left[ e^{\frac{Da(x-x_n+2nl)}{2}} J_0(z_n) \times \right. \\ & \times \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i N_i \left( t - t_n - \frac{x - x_n + 2nl}{a} \right) + 2 \int_0^{t-t_n - \frac{x-x_n+2nl}{a}} \left[ \frac{Da^2}{2} J_0(z) + \right. \\ & \left. \left. + c_1 a^2 \frac{t - t_n - \eta}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i N_i(\eta) d\eta \right] + \\ & + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \left[ e^{\frac{Da(x-x_n-2nl)}{2}} J_0(z_{pn}) \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} N_i \left( t - t_n + \frac{x - x_n - 2nl}{a} \right) + \right. \\ & \left. + 2 \int_0^{t-t_n + \frac{x-x_n-2nl}{a}} \left[ \frac{Da^2}{2} J_0(z) + c_1 a^2 \frac{t - t_n - \eta}{z} J_1(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^{i+1} N_i(\eta) d\eta \right] \right]. \end{aligned} \quad (72)$$

Из равенства (72) непосредственно следует, что при  $t - t_n = 0$  и  $0 < x - x_n < l$  верхние пределы интегрирования всех интегралов и аргументы всех функций  $N_i(\tau)$  в нем становятся отрицательными. Значит, на основании свойств (6) и (65) функций  $N(\tau)$  и  $N_i(\tau)$  получаем из (61)  $u_t(x, t_n) = 0$ .

Таким образом, функция (61) удовлетворяет и второму начальному условию (2).

С целью проверки удовлетворения функцией (61) краевым условиям (3) вычислим производную по  $x$  этой функции. Используя равенства (10) и (24), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} = & - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \left[ \frac{2}{a} e^{\frac{Da(x-x_n+2nl)}{2}} J_0(z_n) \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i N_i \left( t - t_n - \frac{x - x_n + 2nl}{a} \right) + \right. \\ & + 2 \int_0^{t-t_n - \frac{x-x_n+2nl}{a}} \left[ \frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i N_i(\eta) d\eta \left. \right] - \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{B(x-x_n)}{2}} \left[ \frac{2}{a} e^{-\frac{Da(x-x_n-2nl)}{2}} J_0(z_{pn}) \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i N_i \left( t - t_n + \frac{x - x_n - 2nl}{a} \right) - \right. \\ & \left. - 2 \int_0^{t-t_n + \frac{x-x_n-2nl}{a}} \left[ \frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{x - x_n}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i N_i(\eta) \right] d\eta \left. \right] . \quad (73) \end{aligned}$$

С помощью равенств (61) и (73) найдём выражение  $u_x(x, t)$  при  $x - x_n = 0$  и при  $x - x_n = l$ . Вычисляя значение при  $x - x_n = 0$ , запишем отдельно первое слагаемое в первой сумме, а оставшиеся слагаемые объединим под знаком общей суммы. В результате, получим

$$\begin{aligned} u_x(x_n, t) = & -\frac{2}{a} N_0(t - t_n) - B \int_0^{t-t_n} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_0(\eta) d\eta + \\ & - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{2}{a} e^{Danl} J_0(z_{nb}) \left[ N_{2n} \left( t - t_n - \frac{2nl}{a} \right) + 2 \sum_{i=0}^{2n-1} (-1)^i N_i \left( t - t_n - \frac{2nl}{a} \right) \right] + \right. \\ & \left. + B \int_0^{t-t_n - \frac{2nl}{a}} J_0(z) e^{\frac{Da^2(t-t_n-\eta)}{2}} N_{2n}(\eta) d\eta \right] . \quad (74) \end{aligned}$$

При выводе равенства (74) учтено, что согласно (31) и (41)  $z_{nb} = z_{pnb}$ . Первые два слагаемых в формуле (74) в соответствии с интегральным уравнением (13) равны  $N(t - t_n)$ . Общий же член под знаком суммы, согласно интегральным уравнениям (62), он равен нулю. Следовательно, равенство (74) приобретает вид

$$u_x(x_n, t) = N(t - t_n) = \nu(t - t_n), \quad t > t_n .$$

А это значит, что функция (61) удовлетворяет первому краевому условию (3).



При вычислении выражения (73) при  $x - x_n = l$  выполним во второй сумме замену индекса суммирования

$$n_1 = n - 1$$

и объединим слагаемые под общим знаком суммы. В результате, получим

$$\begin{aligned}
 u_x(x_n + l, t) = & - \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{B}{2}l} \left[ \frac{2}{a} e^{\frac{Da}{2}(2n+1)l} J_0(z_{nk}) \times \right. \\
 & \times \left[ 2 \sum_{i=0}^{2n} (-1)^i N_i \left( t - t_n - \frac{(2n+1)l}{a} \right) - N_{2n+1} \left( t - t_n - \frac{(2n+1)l}{a} \right) \right] + \\
 & \left. + 2 \int_0^{t-t_n-\frac{(2n+1)l}{a}} \left[ \frac{B}{2} J_0(z) + c_1 \frac{l}{z} J_1(z) \right] e^{\frac{Da^2}{2}(t-t_n-\eta)} N_{2n+1}(\eta) d\eta \right]. \quad (75)
 \end{aligned}$$

При вычислении (75) учтено равенство (54). Общий член суммы в (75), в соответствии с интегральными уравнениями (63), равен нулю. Следовательно, равенство (75) принимает вид

$$u_x(x_n + l, t) = 0.$$

А это значит, что функция (61) удовлетворяет и второму краевому условию (3).

Таким образом, показано, что функция (61) удовлетворяет всем условиям постановки краевой задачи, то есть является её решением.

### 3. Выводы

Благодаря показанной в [1] возможности интегрального представления, решения телеграфного уравнения удается получать решения целого класса краевых задач. В ограниченной области, кроме того, требуется строить продолжение краевых условий в зависимости от заданных начальных условий. А также применять обобщенный метод отражений применительно к телеграфному уравнению. Совместное применение этих методов позволило получить точное решение второй краевой задачи для телеграфного уравнения в ограниченной области.

### Литература

1. Остапенко В. А. Краевая задача без начальных условий для телеграфного уравнения // Диференціальні рівняння та їх застосування. – Днепропетровск : ДНУ, 2008. – С. 3-17.
2. Остапенко В. А. Вторая краевая задача для телеграфного уравнения в полубесконечной области // Вестник Днепропетровского университета, серия Моделирование. – 2009. – 17(8);1. – С. 89-92.



3. Остапенко В. А. Первая краевая задача для телеграфного уравнения в полуограниченной области // Дифференциальные уравнения и их приложения. – Днепропетровск: ДНУ, 2008. – С. 18-20.
4. Остапенко В. А. Первая краевая задача для телеграфного уравнения в ограниченной области. // Вестник Днепропетровского университета, серия Моделирование. – 2009. – 17(8);1. – С. 149-161.

## SECOND BOUNDARY PROBLEM FOR TELEGRAPH EQUATION IN BOUNDED DOMAIN

V.A. Ostapenko

Dnepropetrovsk National University,  
Dnepropetrovsk, 49010, Ukraine, e-mail: [victor.ostapenko@yandex.ru](mailto:victor.ostapenko@yandex.ru)

**Abstract.** The second boundary problem for the telegraph equation in boundary domain is studied. The problem solution is obtained. The solution construction is based on the application of the reflection method and on the integral representation method developed in [1] which may be used for sufficiently wide class of telegraph equation solutions.

**Key words:** telegraph equation, boundary problem, bounded domain.





УДК 532.72

## ОСОБЕННОСТИ ДИФФУЗИОФОРЕТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ УМЕРЕННО КРУПНОЙ КАПЛИ

К.С. Рязанов

Белгородский государственный университет  
ул.Студенческая, 14, г.Белгород, 308007, Россия, e-mail: [rksb@rambler.ru](mailto:rksb@rambler.ru)

**Аннотация.** Вычислена скорость диффузиофореза испаряющейся умеренно крупной капли в бинарной газовой смеси, внутри которой имеются внутренние источники тепла. Первый компонент газовой смеси образуют молекулы паров вещества, а второй (несущий) компонент смеси не испытывает фазовых превращений на поверхности частицы. Показано, что скорость диффузиофореза зависит от теплового и диффузионного скольжений, поверхностного натяжения, от реактивного эффекта, связанного с неоднородностью фазового перехода; эффектов, связанных с растеканием вдоль поверхности капли в слое Кнудсена молекул газовой смеси.

**Ключевые слова:** диффузиофорез, задача Адамара-Рыбчинского.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается жидкая сферическая капля радиуса  $R$  с плотностью  $\rho_i$  и вязкостью  $\mu_i$ , внутри которой действуют неравномерно распределенные источники тепла с плотностью  $q_i$ . Капля находится в неограниченно расположенной в пространстве бинарной газовой смеси с плотностью  $\rho_e$  и вязкостью  $\mu_e$ . Наличие внутренних источников тепла является модельным представлением, предназначенным для описания физических процессов, сопровождающихся выделением тепла в объёме аэрозольной частицы. Так образом можно моделировать нагрев поверхности частицы под действием химической реакции, вследствие радиоактивного распада вещества частицы, либо вследствие поглощения электромагнитного излучения и т.п. Неоднородный нагрев поверхности капли вызывает, с одной стороны, усиление испарения, что сказывается на процессе теплообмена и массообмена между каплей и окружающей средой и так называемого реактивного эффекта; с другой стороны, такой нагрев влияет на величину теплового и диффузионного скольжения, а также и на термокапиллярный дрейф, связанный с возникновением касательных напряжений на поверхности капли за счёт изменения коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  с температурой  $T_e$  (эффект Марангони). Все это важно как для теоретического описания движения испаряющейся капли, так и для практических приложений. Таким образом, наличие внутренних источников тепла может влиять не только на направление, но и на величину силы и скорости диффузиофореза.

Будем считать, что на поверхности капли происходит фазовый переход вещества, из которого она состоит. Предполагается также, что на относительно большом удалении от капли в объёме газообразной смеси присутствуют постоянные градиенты относительных концентраций  $\nabla C_{1e}$  и  $\nabla C_{2e}$ . Введём обозначения

$$C_{1e} = \frac{n_{1e}}{n_{1e} + n_{2e}}, \quad C_{2e} = \frac{n_{2e}}{n_{1e} + n_{2e}}, \quad (1)$$



где  $n_{1e}$  и  $n_{2e}$  – числа молекул компонентов смеси в единице объёма. При этом суммарное число молекул в единице объёма равно

$$n_e = n_{1e} + n_{2e}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) следует

$$C_{1e} + C_{2e} = 1, \quad (\nabla C_{1e})_\infty = -(\nabla C_{2e})_\infty, \quad (3)$$

Окружающая каплю газовая среда состоит из двух компонентов: основной (несущий) компонент, граничная поверхность для которого непроницаема, и компонента (например, первого), испытывающего фазовый переход на поверхности капли. Молекулы конденсированной фазы испаряются или конденсируются при числах Маха много меньших единицы, т.е. испарение капли протекает в диффузионном режиме, когда основное влияние на процесс переноса в окрестности частицы определяется молекулярной диффузией [2],[6]. Тепло- и массоперенос внутри капли протекает при тепловых и диффузионных числах Пекле много меньших единицы. Движение капли происходит при малых относительных перепадах температуры  $(T_{iS} - T_{e\infty})/T_{e\infty} \ll 1$ . Здесь  $(T_{iS} - T_{e\infty})/T_{e\infty}$  – средняя температура поверхности капли,  $T_{e\infty}$  – температура газа на большом расстоянии от неё. Это позволяет считать коэффициенты молекулярного переноса (вязкости, теплопроводности, диффузии) постоянными величинами. В силу малости времен тепловой и диффузионной релаксации описание движения частиц проводится в квазистационарном режиме. Капля в процессе движения сохраняет сферическую форму, образована однородным и изотропным по своим свойствам веществом.

Если размеры капли таковы, что выполняется следующее соотношение

$$0.01 < \frac{\lambda}{R} < 0.3, \quad (4)$$

то в граничных условиях необходимо учитывать поправку на отличие средней длины свободного пробега молекул ( $\lambda$ ) от нуля. Отношение  $\lambda/R$  называется числом Кнудсена и обозначается  $Kn$ . Частицы, размеры которых удовлетворяют соотношению (4), называются умеренно крупными. При постановке граничных условий для умеренно крупных частиц, весь объём, занятый газом, разбивается на слой Кнудсена – область газа толщиной порядка длин свободного пробега, прилегающая к поверхности частицы, и на весь остальной газ. В слое Кнудсена справедливы кинетические уравнения, которые формируют граничные условия для гидродинамических уравнений. Течения вне слоя Кнудсена описываются гидродинамическими уравнениями Навье-Стокса. В настоящей работе используется гидродинамический метод расчёта. Используемые при этом выражения для кинетических коэффициентов (изотермического  $C_m$ , теплового  $K_{TS}$ , диффузионного  $K_{DS}$  скольжений; влияние на скольжение смеси кривизны поверхности  $\beta_{RT}^*$ ,  $\beta_{RT}$ ,  $\beta_{RC}^*$ ,  $\beta_{RC}$  и барнетовских эффектов  $\beta_{RT}^B$ ,  $\beta_{RC}^B$ ; растекание молекул  $C_{VT}$ ,  $C_{VD}$ ; растекание тепла  $C_{QT}$ ,  $C_{QD}$ ; скачки температуры и относительной концентрации  $K_T^T$ ,  $K_T^N$ ,  $K_N^N$ ,  $K_N^T$ ) взяты нами из [10].

Решение задачи производится в сферической системе координат  $(r, \theta, \phi)$ , начало которой жёстко привязано к центру капли, вектор  $\nabla C_{1e}$  направлен вдоль полярной оси

$z = r \cos \theta$ . При этом скорость диффузиофореза  $U_{df} = -U_\infty$  ( $U_\infty$  – скорость движения центра тяжести смеси относительно капли) и движение капли происходит при малых числах Рейнольдса.

В рамках сформулированных допущений в квазистационарном приближении распределение скорости  $U$ , давления  $P$ , температуры  $T$  и относительной концентрации первого компонента  $C_{1e}$  бинарной газовой смеси, описывается следующей линеаризованной системой уравнений газовой динамики [1],[7]-[9]:

$$\mu_e \Delta U_e = \nabla P_e, \quad \operatorname{div} U_e = 0, \quad \Delta T_e = 0, \quad \Delta C_{1e} = 0, \quad (5)$$

$$\mu_i \Delta U_i = \nabla P_i, \quad \operatorname{div} U_i = 0, \quad \Delta T_i = -q_i/\lambda_i. \quad (6)$$

На поверхности капли выполняются следующие граничные условия [1],[3],[4],[9]:

$$r = R,$$

$$\begin{aligned} n_{2e} U_r^e + D_{12} \frac{n_e^2 m_1}{\rho_e} \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} - Kn C_{VD} \frac{n_{2e} D_{12}}{R} \left( \frac{\partial^2 C_{1e}}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial C_{1e}}{\partial \theta} \right) - \\ - Kn C_{VT} \frac{n_{2e} \nu_e}{R T_e} \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} n_{1e} U_r^e - D_{12} \frac{n_e^2 m_2}{\rho_e} \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} - Kn C_{VD} \frac{n_{1e} D_{12}}{R} \left( \frac{\partial^2 C_{1e}}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial C_{1e}}{\partial \theta} \right) - \\ - Kn C_{VT} \frac{n_{1e} \nu_e}{R T_e} \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) = n_{1i} U_r^i, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} U_\theta^e - U_\theta^i = K_{TS} \frac{\nu_e}{R T_e} \left( 1 + Kn (\sigma_T \beta_{RT} + \beta_{RT}^*) \right) \frac{\partial T_e}{\partial \theta} + \\ + K_{DS} \frac{D_{12}}{R} \left( 1 + Kn (\sigma_C \beta_{RC} + \beta_{RC}^*) \right) \frac{\partial C_{1e}}{\partial \theta} - \\ - Kn K_{TS} \beta_{RT}^B \frac{\nu_e R}{T_e} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 T_e}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right) - \\ - Kn K_{DS} \beta_{RC}^B D_{12} R \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 C_{1e}}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial C_{1e}}{\partial \theta} \right) + \\ + Kn C_m \left( \frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} \right), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\mu_e \left( \frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma}{\partial T_i} \frac{\partial T_i}{\partial \theta} = \mu_i \left( \frac{\partial U_\theta^i}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^i}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta^i}{\partial r} \right), \quad (10)$$

$$T_e - T_i = Kn K_T^N R T_e \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} + Kn K_T^T R \frac{\partial T_e}{\partial r}, \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
 -\lambda_e \frac{\partial T_e}{\partial r} + \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial r} = LD_{12} \frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e} \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} - \\
 - Kn C_{QD} \frac{P_e D_{12}}{R} \left( \frac{\partial^2 C_{1e}}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial C_{1e}}{\partial \theta} \right) - \\
 - Kn C_{QT} \frac{\lambda_e}{R} \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right), \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\frac{n_{1e} - n_{1S}}{n_e} = Kn K_N^N R \frac{\partial C_{1e}}{\partial r} + Kn K_N^T \frac{R}{T_e} \frac{\partial T_e}{\partial r}. \quad (13)$$

Вдали от капли (на бесконечности) граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned}
 r \rightarrow \infty, \quad U_e \rightarrow U_\infty (\cos \theta e_r - \sin \theta e_\theta), \quad P_e \rightarrow P_{e\infty}, \quad T_e \rightarrow T_{e\infty}, \\
 C_{1e} \rightarrow C_{1e\infty} + |\nabla C_{1e}| r \cos \theta. \quad (14)
 \end{aligned}$$

Следующие ограничения на искомые решения связаны с конечностью физических величин:

$$\text{при } r \rightarrow 0, \quad U_i \neq \infty, \quad P_i \neq \infty, \quad T_i \neq \infty. \quad (15)$$

Здесь  $U_r$  и  $U_\theta$  – радиальная и касательная компоненты массовой скорости;  $\rho_e = \rho_{1e} + \rho_{2e}$ ,  $\rho_{1e} = n_{1e} m_1$ ,  $\rho_{2e} = n_{2e} m_2$ ;  $m_1$ ,  $m_2$  – массы первого и второго компонента бинарной газовой смеси;  $D_{12}$  – коэффициент взаимной диффузии компонентов;  $\nu$  – коэффициент кинематической вязкости;  $n_{1i}$  – концентрация молекул вещества капли;  $\mu$  – коэффициент динамической вязкости;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения капли;  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности;  $L$  – удельная теплота фазового перехода;  $P$  – давление;  $T$  – температура;  $n_{1S}$  – концентрация насыщенных паров вещества капли, зависящая от  $T_i$ ;

$$\sigma_T = \left( \frac{\partial^2 T_e}{\partial r \partial \theta} \right) \left( \frac{1}{R} \frac{\partial T_e}{\partial \theta} \right)^{-1}, \quad \sigma_C = \left( \frac{\partial^2 C_{1e}}{\partial r \partial \theta} \right) \left( \frac{1}{R} \frac{\partial C_{1e}}{\partial \theta} \right)^{-1}.$$

В последних формулах индекс "e" относится к газообразной среде, индекс "i" относится к капле, а индексом  $\infty$  обозначены значения физических величин, характеризующие внешнюю среду в невозмущенном потоке.

В граничных условиях на поверхности капли учтены линейные поправки по числу Кнудсена, исходя из допущений в постановке задачи.

Граничное условие (7) указывает на то, что поверхность капли является непроницаемой для второго компонента бинарной газовой смеси. В нём произведен учет конвективного и диффузионного потоков, а также разрыв потоков тепла и массы в слое Кнудсена, пропорциональных соответственно  $C_{VT}$  и  $C_{VD}$ .

Граничное условие (8) отражает непрерывность потока первого компонента бинарной газовой смеси при фазовом переходе. Конвективный и диффузионный потоки, с учетом разрывов потоков тепла (слагаемые, содержащие коэффициент  $C_{VT}$ ) и массы



(слагаемые, содержащие коэффициент  $C_{VD}$ ) в слое Кнудсена, уравниваются конвективным радиальным потоком первого компонента внутри капли.

Граничное условие (9) показывает, что разность касательных составляющих внешней  $U_\theta^e$  и внутренней  $U_\theta^i$  скоростей складывается из суммы изотермического (слагаемого с коэффициентом  $C_m$ ), теплового (слагаемые с  $K_{TS}$ ) и диффузионного (слагаемые с  $K_{DS}$ ) скольжений, а также в этом граничном условии произведён учёт влияния кривизны поверхности капли на скольжение (слагаемые с  $\beta_{RT}, \beta_{RT}^*, \beta_{RC}, \beta_{RC}^*$ ) и учёт барнеттовских эффектов (слагаемые с  $\beta_{RT}^B, \beta_{RC}^B$ ).

В граничном условии (10) учтена непрерывность касательных составляющих тензора полных напряжений, а граничное условие (11) отражает непрерывность температуры на границе слоя Кнудсена, с учётом скачков температуры и относительной концентрации первого компонента в бинарной газовой смеси, соответственно пропорционально  $K_T^T$  и  $K_T^N$ .

Непрерывность радиальных потоков тепла учтена в граничном условии (12), где разность потоков вне и внутри капли уравнивается потоком тепла, идущего на фазовый переход, а также непрерывность неоднородных потоков тепла (слагаемые  $C_{QT}$ ) и массы (слагаемые с  $C_{QD}$ ), растекающихся в слое Кнудсена.

Граничное условие (13) отражает непрерывность концентрации первой компоненты бинарной газовой смеси, испытывающей фазовый переход, на границе слоя Кнудсена, т.е. разность концентрации молекул с насыщенной концентрацией паров вещества капли уравнивается скачками относительной концентрации и температуры, которые пропорциональны  $K_N^N$  и  $K_N^T$ .

Приведём уравнения (5), (6) и граничные условия (7)-(15) к безразмерной форме, введя следующим образом безразмерные координату, скорость и температуру:  $y_k = x_k/R, V = U/U_\infty, t = T/T_{e\infty}$ . Определяющими параметрами в задаче являются материальные постоянные  $\rho_e, \mu_e, \lambda_e, D_{12}$  и сохраняющиеся в процессе движения капли  $R$ , величины  $|\nabla C_{1e}|, U_\infty$ . Из них можно составить три безразмерных комбинации:  $\varepsilon = R|\nabla C_{1e}|$ , числа Пекле и Рейнольдса.

При  $\varepsilon \ll 1$  набегающий поток оказывает лишь возмущающее влияние, и поэтому решение уравнений (5), (6) будем искать в виде:

$$V_k = V_{k0} + \varepsilon V_{k1}, \quad p_k = p_{k0} + \varepsilon p_{k1}, \quad t_k = t_{k0} + \varepsilon t_{k1}, \quad C_{1e} = C_{1e0} + \varepsilon C_{1e1}, \quad k = e, i. \quad (16)$$

**2. Вывод выражения для диффузиофоретической скорости.** Для нахождения пространственных распределений полей  $t_k, C_{1e}, V_k$  и  $p_k$  подставим (1.16) в систему уравнений (5), (6). С учётом граничных условий (14), (15), они имеют вид

$$V_r^e = \cos \theta \left( 1 + \frac{A_2}{y} + \frac{A_1}{y^3} \right), \quad V_\theta^e = -\sin \theta \left( 1 + \frac{A_2}{2y} - \frac{A_1}{2y^3} \right), \quad (17)$$

$$V_r^i = \cos \theta (A_3 + A_4 y^2), \quad V_\theta^e = -\sin \theta (A_3 + 2A_4 y^2), \quad (18)$$

$$p_e = 1 + \frac{\mu_e U_\infty}{R y^2} \cos \theta A_2, \quad p_i = p_0 + 10 A_4 y^2 \frac{\mu_i U_\infty}{R} \cos \theta. \quad (19)$$



$$t_{e0} = 1 + \frac{\Gamma_0}{y}, \quad t_{i0} = B_0 + \frac{R^2 J_0}{3\lambda_i T_{e\infty} y} + \int_1^y \frac{\psi_0}{y} dy - \frac{1}{y} \int_1^y \psi_0 dy, \quad (20)$$

$$C_{1e0} = C_{1e\infty} + \frac{M_0}{y}, \quad t_{e1} = \frac{\Gamma_1}{y^2} \cos \theta, \quad C_{1e1} = \left( y + \frac{M_1}{y^2} \right) \cos \theta, \quad (21)$$

$$t_{i1} = \cos \theta \left\{ B_1 y + \frac{R J_1}{3\lambda_i T_{e\infty} y^2} + \frac{1}{3} \left[ y \int_1^y \frac{\psi_1}{y^2} dy - \frac{1}{y^2} \int_1^y \psi_1 y dy \right] \right\}. \quad (22)$$

Здесь

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3, \quad J_0 = \frac{1}{V} \int q_i dV, \quad J_1 = \frac{1}{V} \int q_i z dV, \quad z = r \cos \theta,$$

$$\psi_n = -\frac{(2n+1)R^2 y^2}{2\lambda_i T_{e\infty}} \int_{-1}^1 q_i(r, \theta) P_n(\cos \theta) d(\cos \theta).$$

Постоянные интегрирования  $A_m$  ( $m = 1, \dots, 4$ ),  $M_l$ ,  $\Gamma_l$ ,  $B_l$  ( $l = 0, 1$ ) находятся в результате решения линейной системы алгебраических уравнений, полученных после подстановки выражений (17)-(22) в граничные условия на поверхности капли (7)-(13).

Общая сила, действующая на частицу, определяется интегрированием тензора напряжений по её поверхности и в сферической системе координат определяется по следующей формуле [7], [8]:

$$F_z = \int (-P_e \cos \theta + \sigma_{rr} \cos \theta - \sigma_{r\theta} \sin \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (23)$$

Здесь  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{r\theta}$  – компоненты тензора напряжений, которые в сферической системе координат имеют вид [7]:

$$\sigma_{rr} = \mu_e \left( 2 \frac{\partial U_r^e}{\partial r} - \frac{2}{3} \operatorname{div} U_e \right), \quad \sigma_{r\theta} = \mu_e \left( \frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial U_r^e}{\partial \theta} - \frac{\partial U_\theta^e}{\partial r} \right).$$

Подставляя в (23) выражения (17)-(19), после интегрирования получаем

$$\mathbf{F}_z = -4\pi R \mu_e U_\infty A_2 \mathbf{n}_z. \quad (24)$$

Если капля движется равномерно, то приравнявая (24) к нулю, учитывая, что  $\mathbf{U}_{df} = -\mathbf{U}_\infty$ , выражение для скорости диффузиофоретического переноса умеренно крупных капель в бинарной газообразной смеси имеет следующий вид:

$$\mathbf{U}_{df} = -\varepsilon (\mathbf{U}_{TS} + \mathbf{U}_{DS} + \mathbf{U}_{VT} + \mathbf{U}_{VD} + \mathbf{U}_p + \mathbf{U}_\sigma), \quad (25)$$

где

$$\mathbf{U}_{TS} = K_{TS} \frac{\Gamma_1 \nu_e}{R \phi_3 t_{eS}} [1 + Kn(\beta_{RT}^* - 2\beta_{RT} + 3\beta_{RT}^B)] \mathbf{n}_z,$$



$$\begin{aligned}
 U_{DS} &= K_{DS} \frac{D_{12}}{R \phi_0 \phi_3} \left( \Gamma_1 \phi_2 [1 + Kn(\beta_{RC}^* - 2\beta_{RC} + 3\beta_{RC}^B)] - \right. \\
 &\quad \left. - 2Kn[\phi_1(1 + Kn(\beta_{RC}^* + \beta_{RC}^B)) + \beta_{RC} - \beta_{RC}^B] \right) \mathbf{n}_z, \\
 U_{VT} &= -C_{VT} \frac{\Gamma_1 \nu_e Kn}{R \phi_3 t_{eS}} \left( 1 + 2 \frac{\mu_e}{\mu_i} + 6 C_m Kn \right) \mathbf{n}_z, \\
 U_{VD} &= -C_{VD} \frac{Kn}{R \phi_3} \left( 1 + 2 \frac{\mu_e}{\mu_i} + 6 C_m Kn \right) \left( \frac{\Gamma_1 \nu_e}{t_{eS}} + \frac{2 \phi_1 D_{12}}{\phi_0} \right) \mathbf{n}_z, \\
 U_p &= \frac{n_e^2 m_1 D_{12}}{R \rho_e n_{2e} \phi_0 \phi_3} \left( 1 + 2 \frac{\rho_e}{\rho_{1i}} + 2 \frac{\mu_e}{\mu_i} + 6 C_m Kn \right) (\Gamma_1 \phi_2 - 1) \mathbf{n}_z, \\
 U_\sigma &= \frac{1}{3 \phi_3 \mu_i} \frac{\partial \sigma}{\partial t_{iS}} \left( \Gamma_1 [1 + Kn(K_T^T + K_T^N t_{eS} \frac{\phi_2}{\phi_0})] - Kn K_T^N t_{eS} \frac{2}{\phi_0} \right) \mathbf{n}_z,
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \phi_0 &= 1 + 2Kn(K_N^N - K_T^N t_{eS} C_{1S}^*), & \phi_1 &= K_N^N - K_T^N t_{eS} C_{1S}^*, \\
 \phi_2 &= C_{1S}^* + 2Kn(K_T^T C_{1S}^* - K_N^T t_{eS}^{-1}), & \phi_3 &= 1 + \frac{\mu_e}{\mu_i} + 2 C_m Kn,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= \frac{R J_1}{\lambda_i T_{e\infty} \delta} + \\
 &\quad + \frac{3}{\delta \phi_0} \left( LD_{12} \frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e \lambda_i T_{e\infty}} + Kn \left[ K_T^N t_{eS} + C_{QD}(\phi_0 - 1) \frac{P_{e\infty} D_{12}}{T_{e\infty} \lambda_i} \right] \right), \\
 \delta &= 1 + 2 K_T^T Kn + 2 \frac{\lambda_e}{\lambda_i} (1 - C_{QT} Kn) + \\
 &\quad + 2 \frac{\phi_2}{\phi_0} \left( LD_{12} \frac{n_e^2 m_1 m_2}{\rho_e \lambda_i T_{e\infty}} + Kn \left[ K_T^N t_{eS} - C_{QD} \frac{P_{e\infty} D_{12}}{T_{e\infty} \lambda_i} \right] \right).
 \end{aligned}$$

Среднее значение температуры поверхности капли  $t_{iS}$  связано со средней относительной температурой  $t_{eS}$  следующей системой уравнений, в которой  $t_{eS} = t_{e0} |_{y=1}$ ,  $t_{iS} = t_{i0} |_{y=1}$ ,  $C_{1S}^* = \frac{dC_{1e}}{dt_{iS}}$ :

$$\begin{aligned}
 t_{eS} - t_{iS} &= \zeta - K_T^T Kn(t_{eS} - 1), \\
 t_{eS} &= 1 + \frac{R^2 J_0}{3\lambda_e T_{e\infty}} + LD_{12} \frac{n_e^2 m_1 m_2 \zeta}{\lambda_e \rho_e T_{e\infty}}, \quad \zeta = \frac{C_{1e\infty} - C_{1S} + K_N^T Kn(1 - t_{eS}^{-1})}{1 + K_N^N Kn}. \quad (26)
 \end{aligned}$$

В пределе числа Кнудсена, стремящегося к нулю  $\lambda/R \rightarrow 0$ , (25) переходит в формулу для скорости диффузиофоретического движения крупных летучих капель в бинарной газобразной среде [1], [3]. Из (25) могут быть получены формулы для скорости

диффузиофоретического движения крупных твёрдых частиц, которые совпадают с ранее полученными формулами [1], [3].

Из формулы (25) видно, что полная скорость диффузиофоретического переноса капель в газообразной смеси состоит из скоростей теплового  $U_{TS}$  и диффузионных  $U_{DS}$  скольжений; скорости, связанной с растеканием молекул компонентов газовой смеси  $U_{VT}$ ,  $U_{VD}$ ; реактивной скорости  $U_p$ ; скорости Марангони  $U_\sigma$ .

Таким образом, формула (25) для скорости диффузиофоретического движения умеренно крупных капель в двухкомпонентной газовой среде наиболее полно отражает по числу Кнудсена поправки на кривизну частицы (пропорциональные  $\beta_{RT}$ ,  $\beta_{RT}^*$ ,  $\beta_{RC}$ ,  $\beta_{RC}^*$ ), барнеттовские эффекты (пропорциональные  $\beta_{RT}^B$ ,  $\beta_{RC}^B$ ), растекание молекул компонентов газовой смеси ( $\sim C_{VT}$ ,  $\sim C_{VD}$ ), потока тепла ( $\sim C_{QT}$ ,  $\sim C_{QD}$ ), а также фазовый переход вещества капли на её поверхности. Учтены зависимость коэффициента поверхностного межфазного натяжения от температуры и неоднородный нагрев поверхности капли внутренними источниками тепла.

## Литература

1. Галоян В.С., Яламов Ю.И. Динамика капель в неоднородных вязких средах / В.С. Галоян, Ю.И. Яламов. – Ереван: Луйс. 1985. – 208 с.
2. Фукс Н.А. Испарение и рост капель в газообразной среде / Н.А. Фукс. – Москва: Изв. АН СССР, 1958. – 90 с.
3. Дерягин Б.В., Яламов Ю.И. Теория движения капель растворов в диффундирующей бинарной газовой смеси // ДАН СССР. – 1967. – 175;1. – С.59-62.
4. Щукин Е.Р., Яламов Ю.И., Шулиманова З.Л. Избранные вопросы физики аэрозолей / Учебное пособие для студентов и аспирантов / Е.Р. Щукин. – М.: МПУ, 1992. – 297 с.
5. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика / М.: Физ. мат. лит., 1959. – 230 с.
6. Брюханов О.Н., Шевченко С.Н. Теплообмен / Учебное пособие / О.Н. Брюханов. – М.: Изд. АСВ, 2005. – 460 с.
7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика / Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. – М.: Наука, 1986. – 736 с.
8. Хаппель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса / Дж. Хаппель, Г. Бреннер. – М.: Мир, 1960. – 630 с.
9. Яламов Ю.И., Юшканов А.А. Диффузионное скольжение бинарной газовой смеси вдоль искривленной поверхности // ДАН СССР. – 1977. – 237;2. – С.303-306.
10. Яламов Ю.И., Поддоскин А.Б., Юшканов А.А. О граничных условиях при обтекании неоднородно нагретым газом сферической поверхности малой кривизны // ДАН СССР. – 1980. – 254;2. – С.1047-1050.





## PECULIARITIES OF THE DIFFUSIOPHORESIS MOVEMENT OF THE EVAPORATING AND GENTLY LARGE DROP

**K.S. Ryazanov**

Belgorod State University

Studencheskaya st.,14, Belgorod, 308007, Russia, e-mail: [rksb@rambler.ru](mailto:rksb@rambler.ru)

**Аннотация.** The diffusiophoresis velocity of the evaporating and gently large drop being in the binary gas mixture where there are some internal heat sources is calculated. First component of the gas mixture consists of vapor molecules. Second mixture component (the supporting one) does not undergo phase transition on the particle surface. It is shown that the diffusiophoresis velocity depends on the heat gliding and the diffusion one; on the surface tension; on the reactive effect connected with the phase transition nonuniformity; on some effects connected with the flowing of gas mixture molecules along the drop surface in the Knudsen layer.

**Key words:** diffusiophoresis, Hadamar-Rybchinskii problem.



УДК 539.18

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ СЕЧЕНИЕ И ВЕКТОРНАЯ АНАЛИЗИРУЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ РЕАКЦИИ УПРУГОГО DR-РАССЕЯНИЯ ПРИ ЭНЕРГИИ 2 ГэВ

А.А. Терехин<sup>1),2)\*</sup>, В.В. Глаголев<sup>2)</sup>, В.П. Ладыгин<sup>2)</sup>, Н.Б. Ладыгина<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Белгородский государственный университет,  
ул. Студенческая, 14, Белгород, 308007, Россия

<sup>2)</sup> Объединенный институт ядерных исследований,  
ул. Жолио-Кюри, 6, Дубна, 141980, Россия, \*e-mail: [taa@uc.jinr.ru](mailto:taa@uc.jinr.ru)

**Аннотация.** Представлены результаты измерений и процедура обработки данных по угловой зависимости векторной анализирующей способности  $A_y$  и сечению реакции упругого dr-рассеяния при энергии 2 ГэВ. Полученные результаты находятся в хорошем согласии с мировыми экспериментальными данными и с теоретическими расчетами, выполненными в рамках релятивистской модели многократного рассеяния.

**Ключевые слова:** упругое dr-рассеяние, дифференциальное сечение, анализирующая способность.

### Введение

В связи с активным изучением природы ядерных сил и ненуклонных степеней свободы, в последнее время сильно возрос интерес к простейшим ядерным реакциям и к их поляризационным характеристикам. Исследование поляризационных эффектов необходимо для решения многих современных проблем ядерной физики и физики элементарных частиц. Структура легких ядер интенсивно исследуется в последние несколько десятилетий с помощью как электромагнитных [1], так и адронных пробников [2]. Накоплено существенное количество экспериментальных данных по спиновой структуре легких ядер на малых межнуклонных расстояниях. Реакции  $p(d, p)d$ ,  ${}^3\text{He}(d, p){}^4\text{He}$  или  ${}^3\text{He}(d, {}^3\text{He})d$  являются простейшими процессами с большой передачей импульса. Они могут использоваться как инструмент для изучения структуры дейтрона и  ${}^3\text{He}$ , а также механизмов взаимодействия нуклонов на малых расстояниях.

Дейтрон обладает спином, равным 1, что дает широкие возможности в проведении многочисленных поляризационных экспериментов, которые позволяют получить новую информацию о поведении различных независимых наблюдаемых. В отличие от статических свойств дейтрона (энергия связи, среднеквадратичный радиус, магнитный момент), его структура на малых расстояниях изучена гораздо хуже. Высокоимпульсные компоненты в дейтронных волновых функциях отвечают области малых межнуклонных расстояний ( $r_{NN} < 1$  Фм), где нуклоны уже заметно перекрываются и теряют свою индивидуальность. Изучение поведения поляризационных наблюдаемых, чувствительных к спиновой структуре дейтрона на малых межнуклонных расстояниях, позволит

получить информацию о проявлении ненуклонных степеней свободы и релятивистских эффектах.

За последние годы был проведен ряд исследований поляризационных наблюдаемых реакции  $d$ -упругого рассеяния в различных областях энергий. Целью исследований является изучение поляризационных наблюдаемых при промежуточных и высоких энергиях. Для 270 MeV были получены данные по сечению реакции, коэффициенты передачи поляризации от дейтрона протону  $K_{ij}$ , дейтронным векторной  $A_y$  и тензорным  $A_{ij}$  анализирующим способностям, а также поляризации  $P_y$  [3]. Сечение и векторная анализирующая способность хорошо описываются фаддеевскими вычислениями, основанными на новых NN-потенциалах, с использованием Таксон-Мельбурнской трехнуклонной силы [4]. С другой стороны, тензорная анализирующая способность  $A_{ij}$ , коэффициенты передачи  $K_{ij}$  и поляризация  $P_y$  этими вычислениями не описываются. Также для 270 MeV были получены данные по сечению,  $A_y$  и  $A_{ij}$  для углового диапазона в с.ц.м. [5]. Сравнение с фаддеевскими расчетами показывает хорошее согласие всех компонент анализирующих способностей. Заметное расхождение наблюдается в сечении (30 %) вблизи угла  $\theta^* = 120^\circ$ .

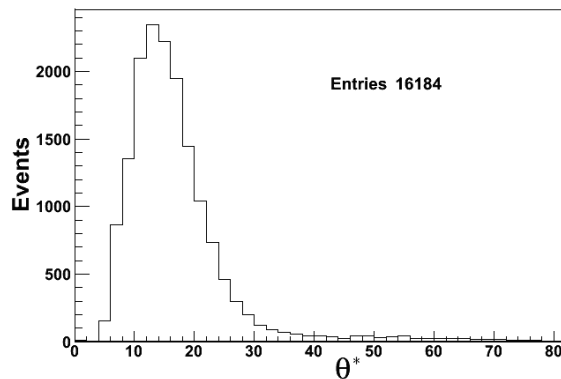


Рис. 1. Распределение событий по углу рассеяния  $\theta^*$

С увеличением энергии все большую роль начинают играть релятивистские эффекты и ненуклонные степени свободы. Другим важным аспектом является то, что анализирующие способности реакции имеют достаточно большое значение для проведения эффективной поляриметрии в широком диапазоне энергий дейтрона. Недавно были получены данные по анализирующим способностям  $A_y$  и  $A_{ij}$  при 880 MeV в угловом диапазоне  $60^\circ < \theta^* < 140^\circ$  [6].

## 1. Эксперимент

Набор данных осуществлялся в серии экспериментов на 100 см водородной камере, экспонированной в выведенном пучке дейтронов синхрофазотрона с энергией 2 ГэВ. Использование пузырьковых камер примечательно тем, что наблюдение можно проводить в условиях  $4\pi$  геометрии. Характерной особенностью водородной камеры является то,

что взаимодействие происходит только с протонами (так называемая чистая мишень). Кроме того, камера находится в магнитном поле, что помогает проводить идентификацию по массе вторичных частиц.

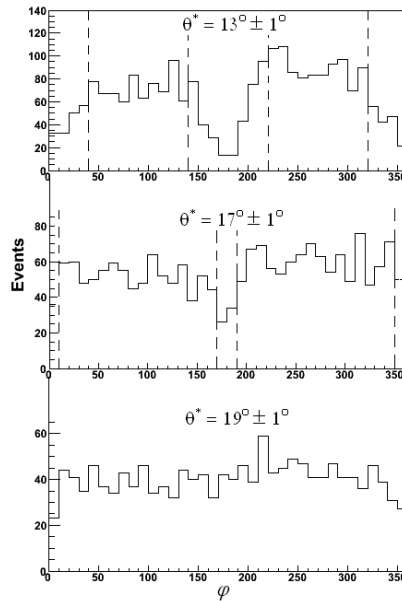


Рис. 2. Распределения по азимутальному углу  $\varphi$  для разных углов

Источник поляризованных дейтронов "Полярис" [7] обеспечивал дейтроны с теоретическими значениями векторной и тензорной поляризации:  $(P_z, P_{zz}) = (+2/3, 0)$ ,  $(-2/3, 0)$  – поляризованные моды и  $(0, 0)$  – неполяризованная мода. Эти состояния чередовались в циклах ускорителя, соответствующие метки передавались на регистрирующую аппаратуру камеры. События отбирались на просмотрных столах, измерялись на полуавтоматах и автомате HPD в ОИЯИ. Математическая обработка проводилась с помощью адаптированных программ THRESH [8] (геометрическая реконструкция) и GRIND [9] (кинематическая идентификация) CERN, а также цепочки вспомогательных программ для отбора реакций и записи результатов на DST (ленту суммарных результатов). События классифицировались по результатам программы кинематической идентификации (GRIND) с использованием данных по оценке ионизационных потерь. В каждый кадр пленки впечатывалась с помощью информационного табло необходимая для последующей обработки служебная информация. В частности, при работе в пучке поляризованных дейтронов, впечатывалась в закодированном виде приходившая в каждом цикле ускорения с источника поляризованных частиц "ПОЛЯРИС" информация о состоянии поляризации. В нашем случае – векторной. Эта информация сохранялась для каждого события и на DST.

Дейтронная поляризация вычислялась из анализа азимутальной асимметрии нуклонов отдачи при квазисвободном рассеянии на протонной мишени. Анализ проводился как для всех событий, так и для событий в области малых переданных импуль-

сов ( $k < 0.065$  GeV/c), т.к. в последней дейтронная и нуклонная векторные поляризации приблизительно равны. Полученное значение дейтронной поляризации равнялось  $P_z^d = 0.488 \pm 0.061$  [10].

## 2. Обработка данных

Значения для векторной анализирующей способности  $A_y$  находились путем обработки событий, соответствующих разным состояниям поляризации пучка дейтронов (таким состояниям соответствуют моды поляризации 1 и 2). Распределение по углу рассеяния  $\theta^*$  в системе центра масс представлено на рис. 1.

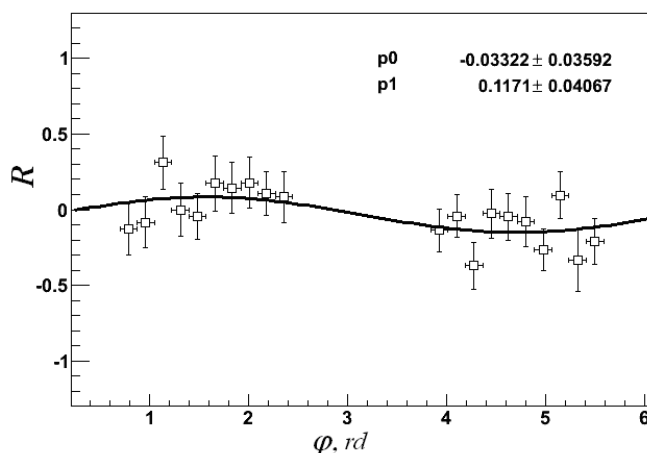


Рис. 3. Распределение величины  $R$  по азимутальному углу  $\varphi$  для значений угла рассеяния  $12^\circ < \theta < 14^\circ$

Рабочая часть спектра разбивалась на последовательные интервалы (бины). Число событий в каждом интервале нормировалось на ширину последнего. Для каждого интервала было построено распределение по азимутальному углу  $\varphi$ . Для малых углов рассеяния  $\theta^*$  существенны потери событий (рис. 2), обусловленные тем, что на стадии просмотра треки протонов отдачи с импульсами меньше 80 МэВ/с уже не видны в камере. Кроме того, имеют место азимутальные потери, связанные с оптикой камеры [11]. В этой области исключались интервалы, соответствующие потерянными событиями. Исключение по интервалам проводилось симметрично относительно значений  $\varphi = 0^\circ$  и  $\varphi = 180^\circ$ . Оставшиеся события использовались для вычисления дифференциального сечения и анализирующей способности.

Для каждого выбранного интервала по углу производилось вычисление величины  $R$ :

$$R = \frac{N_1 - N_2}{N_1 + N_2}, \quad (1)$$

где  $N_1$  и  $N_2$  – числа событий для значений спиновых мод 1 и 2 соответственно. Аппроксимация полученных данных производилась функцией вида  $p_0 + p_1 \sin(\varphi)$ . На рис. 3, в каче-

стве примера, приведено распределение по азимутальному углу для углов  $12^\circ < \theta^* < 14^\circ$  в с.ц.м.

Для каждого интервала распределения по  $\theta^*$  были получены значения параметров  $p_0$  и  $p_1$  аппроксимирующей функции  $p_0 + p_1 \sin(\varphi)$ . Параметр  $p_0$  имеет смысл так называемой фальшивой асимметрии. Оценочное значение фальшивой асимметрии, полученное аппроксимированием значений параметра  $p_0$ , не превышает 5% и составляет  $p_0 = -0.025 \pm 0.014$ . Параметр  $p_1$  связан с анализирующей способностью  $y$  выражением:

$$A_y = \frac{2 p_1}{3 p_y}, \quad (2)$$

где векторная поляризация пучка  $p_y = 0.488 \pm 0.061$  [11].

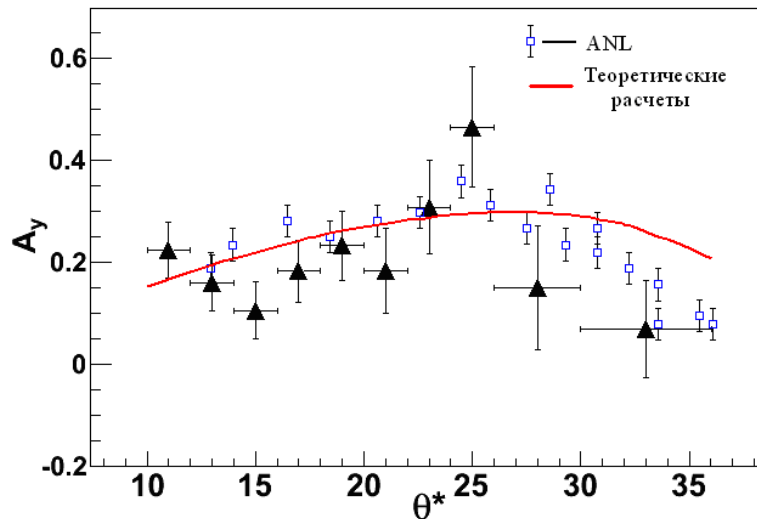


Рис. 4. Анализирующая способность  $A_y$  реакции  $dp$ -упругого рассеяния при энергии 2 ГэВ. Сплошные символы – результаты данного эксперимента, открытые – данные, полученные в ANL [12]. Линия – результаты расчетов в рамках модели многократного рассеяния [13]

Полученные значения для векторной анализирующей способности  $y$  представлены на рис. 4. Они с достаточной точностью согласуются с данными, полученными в ANL [12], и с расчетами теории [13].

Для вычисления сечения реакции  $dp$ -упругого рассеяния использовались события, полученные как с поляризованных, так и неполяризованных пучков дейтронов. Проводился анализ распределения по косинусу угла рассеяния  $\theta^*$  в системе центра масс. Для каждого интервала  $\Delta\theta^*$  брался соответствующий интервал  $\Delta \cos \theta^*$  (рис. 5,6). Затем проводилась нормировка на ширину интервала  $\Delta \cos \theta^*$ . Сечение реакции вычислялось по формуле:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2\pi} N(\cos \theta^*) \frac{A}{\Delta \cos \theta^*}, \quad (3)$$

где  $A = 0.0003342 \pm 0.0000007$  [мб/событие] – миллибарн-эквивалент события [14],  $\Delta \cos \theta^*$  – ширина интервала в распределении числа событий по косинусу угла рассеяния  $\theta^*$ .

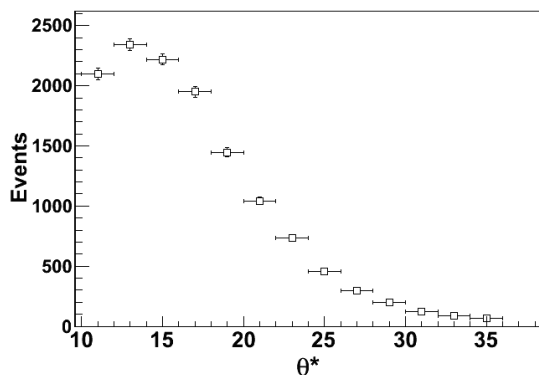


Рис. 5. Распределение событий по углу рассеяния  $\theta^*$

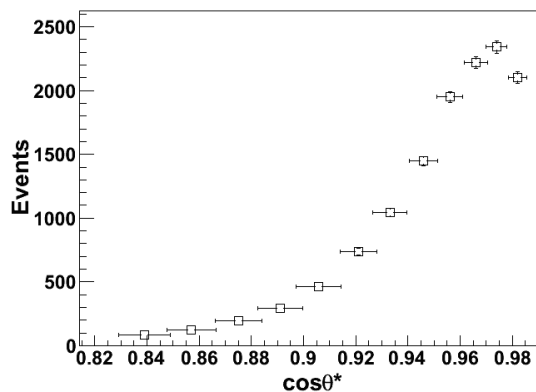


Рис. 6. Распределение событий по  $\cos \theta^*$

С увеличением угла рассеяния  $\theta^*$  уменьшается отклонение от изотропии. При  $\theta^* > 20^\circ$  распределение становится изотропным. В распределении по азимутальному углу  $\varphi$  исключались бины, соответствующие потерянным событиям. Исключение проводилось в тех же пределах, что и при вычислении анализирующей способности  $A_y$ .

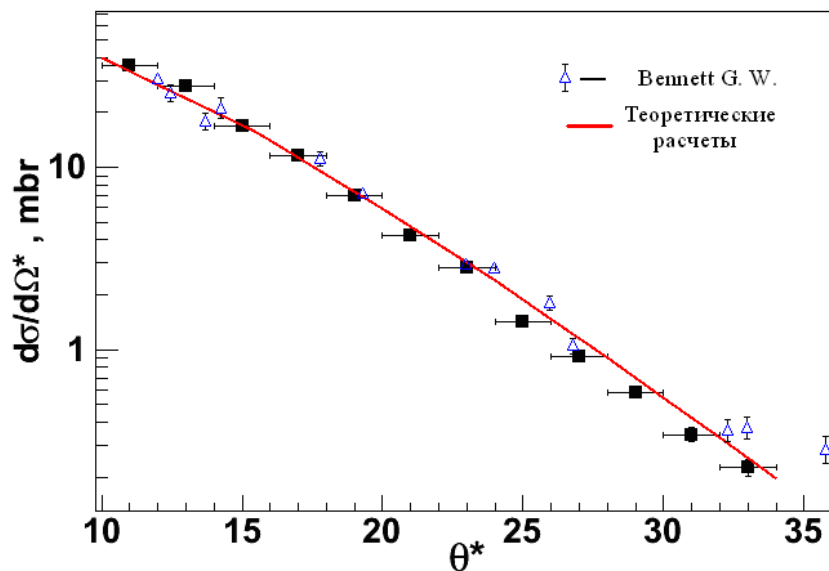


Рис. 7. Дифференциальные сечения в с.д.м. Сплошные символы – результаты данного эксперимента, открытые символы – данные работы [15], сплошная линия – результаты теоретических расчетов [13]

Полученные значения сечения реакции в зависимости от угла  $\theta^*$  сравнивались с



мировыми данными [15], а также с теоретическими расчетами, выполненными в рамках релятивистской модели многократного рассеяния и, как видно из рис. 7, находятся в хорошем согласии.

### Заключение

Получены значения по векторной анализирующей способности и сечению реакции упругого  $dp$ -рассеяния при энергии 2 ГэВ в угловом диапазоне  $10^\circ < \theta^* < 34^\circ$  в с.ц.м. Проведено сравнение с мировыми данными и с теоретическими расчетами, выполненными в рамках релятивистской модели многократного рассеяния. Выявлено хорошее согласие теоретических и экспериментальных значений.

### Литература

1. Day D. et al. // Phys.Rev.Lett. – 1979. – 43. – P.1143.
2. Lehar F. // RNP: from Hundreds of MeV to TeV. 2001. V. 1. P. 36.
3. Sakai H. et al. Precise measurement of  $dp$  elastic scattering at 270 MeV and three-nucleon force effects // Phys Rev Lett. – 2000. – 162. – P.143.
4. Coon S.A. et.al. // Nucl.Phys. – 1979. – A317. – P.242.
5. Sakamoto N. et al. Measurement of the vector and tensor analyzing powers for the  $dp$  elastic scattering at  $E_d = 270$  MeV // Phys. Lett. – 1996. – B.367. – P.60-64.
6. Kurilkin P.K. et al. Measurement of the vector and tensor analyzing powers in  $dp$  elastic scattering at the energy of 880 MeV // European Physical Journal. Special Topics. – 2008. – 162. – P.137-141.
7. Anishchenko, et al. AIP Conf. Proc. – 95 (1983). – P.445.
8. CERN T.C.Program Library, sec. THRESH, 1.3. – 1966.
9. CERN T.C.Program Library, sec. GRIND, 30.10. – 1968.
10. Glagolev V.V. et al. The deuteron D-state probability // Zeitschrift fur Physik. – 1996. – A 356. – P.183-186.
11. Глаголев В.В. Оптика метровой водородной пузырьковой камеры // препринт ОИЯИ.
12. Haji Saica M. // Phys. Rev. – 1987. – C36. – P.2010.
13. Ladygina N.B. Measurement of the vector and tensor analyzing powers in  $dp$  elastic scattering at the energy of 880 MeV // European Physical Journal. Special Topics. – 2008. – 162. – P.137-141.
14. Bugg D.V. et al. Nucleon-Nucleon Total Cross Sections from 1.1 to 8 GeV/c // Phys. Rev. Lett. – 1996. – 146. – P.980-992.





15. Bennett G. W. et al. Proton-deuteron scattering at 1 BeV // Phys. Rev. Lett. – 1976. – 19. – P.387-390.

**DIFFERENTIAL CROSS SECTION  
AND VECTOR ANALYZING POWER  
IN D-P ELASTIC SCATTERING AT 2.0 GeV**

**A.A. Terekhin** <sup>1),2)\*</sup>, **V.V. Glagolev**<sup>2)</sup>, **V.P. Ladygin**<sup>2)</sup>, **N.B. Ladygina**<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> Belgorod State University,  
Studencheskaja St., 14, Belgorod, 308007, Russia

<sup>2)</sup> Joint Institute for Nuclear Researches,  
Zholio-Kjuri St., 6, Dubna, 141980, Russia, \* e-mail: [taa@uc.jinr.ru](mailto:taa@uc.jinr.ru)

**Abstract.** The results of measurements as well as handling procedure for the data on the angular dependence of the vector analyzing powers  $A_y$  and differential cross section for dp-elastic scattering at  $E_d = 2$  GeV are reported. The obtained data are in good agreement with the existing data and theoretical calculations made in the framework of the relativistic multiple scattering model.

**Key words:** elastic dp-scattering, differential cross-section, analysis possibility.



УДК 539.3

## ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МНОГОПРОЛЁТНОГО РОТОРА НА НЕЛИНЕЙНЫХ ОПОРАХ

С.В. Филиппковский

Институт проблем машиностроения НАН Украины,  
ул. Дм.Пожарского, 2/10, Харьков, 61046, Украина, e-mail: [svfil@ipmach.kharkov.ua](mailto:svfil@ipmach.kharkov.ua)

**Аннотация.** Построена модель колебаний несимметричного многодискового ротора на трёх подшипниках с кубической нелинейностью жёсткости. Учтены гироскопические моменты, упругость и распределённая масса вала. Эта модель состоит из системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. К исследованию системы применён метод нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера. Получены формы колебаний вала с дисками и фазовые траектории системы. Исследованы амплитудно-частотные характеристики системы. Построены скелетные кривые колебаний однопролётного и многопролётного роторов на опорах с нелинейными свойствами.

**Ключевые слова:** ротор, нелинейные опоры, метод нелинейных нормальных форм, фазовые траектории, скелетные кривые.

### Введение

Многие приборы и агрегаты летательных аппаратов содержат быстровращающиеся роторы, у которых на одном валу закреплено несколько дисков. В середине пролёта таких роторов могут быть дополнительные подшипники. Эти подшипники, как правило, являются нелинейными опорами. Требование снижения веса и вибрации агрегатов приводит к необходимости повышения точности расчёта амплитудно-частотных характеристик таких систем при эксплуатации.

Поперечные колебания валов с дисками в линейной постановке с учётом гироскопических моментов, внешнего и внутреннего трения исследованы Ф.М. Диментбергом [1]. Различные модели вибрации роторов рассмотрены в книге А. Тондла [2]. Е.Г. Голоскоков исследовал квазипериодическое движение ротора [3]. К. Пьерр и С. Шоу разработали метод нелинейных нормальных форм (ННФ) для исследования колебаний системы с нелинейным упругим элементом [4]. ННФ колебаний вращающегося вала в подшипниках скольжения исследованы в статье [5]. К.В. Аврамовым и К. Пьерром с помощью метода ННФ рассмотрены колебания систем с гироскопическими силами [6]. В статье [7] исследованы собственные колебания ротора с учётом нелинейных жесткости и демпфирования опор.

Целью настоящей работы является исследование динамики упругого многодискового ротора на трёх нелинейных опорах.

## 1. Уравнения движения системы

Расчётная модель рассматриваемой системы показана на рис. 1. Начало координат располагаем в сечении опоры  $A$ . Длина вала –  $l$ , расстояние от опоры  $A$  до промежуточной опоры  $C$  обозначим  $l_c$ , до  $k$ -го диска –  $l_k$ . Перемещения сечений вала по направлениям координатных осей обозначим  $u_x, u_y$ . Углы поворота сечения вала обозначим  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ . Угловые скорости сечений вала  $\omega_x, \omega_y, \omega_z$  связаны с углами поворота известными кинематическими соотношениями [6]. Представим зависимости углов поворота от прогибов вала следующим образом:

$$\theta_1 = -\frac{\partial u_y}{\partial z}, \quad \theta_2 = \frac{\partial u_x}{\partial z}.$$

Кинетическая энергия вала  $T_B$  системы имеет вид

$$T_B = \frac{\rho I}{2} \left[ \int_0^l (\dot{u}'_x)^2 dz + \int_0^l (\dot{u}'_y)^2 dz \right] + \rho I \omega^2 l - \\ - 2\rho I \omega \int_0^l \dot{u}'_x \dot{u}'_y dz + \frac{\rho S}{2} \int_0^l [(\dot{u}_x)^2 + (\dot{u}_y)^2] dz,$$

где  $\rho$  – плотность материала вала,  $I$  – момент инерции сечения вала,  $S$  – площадь сечения вала,  $\omega = \omega_z$  – угловая скорость ротора.

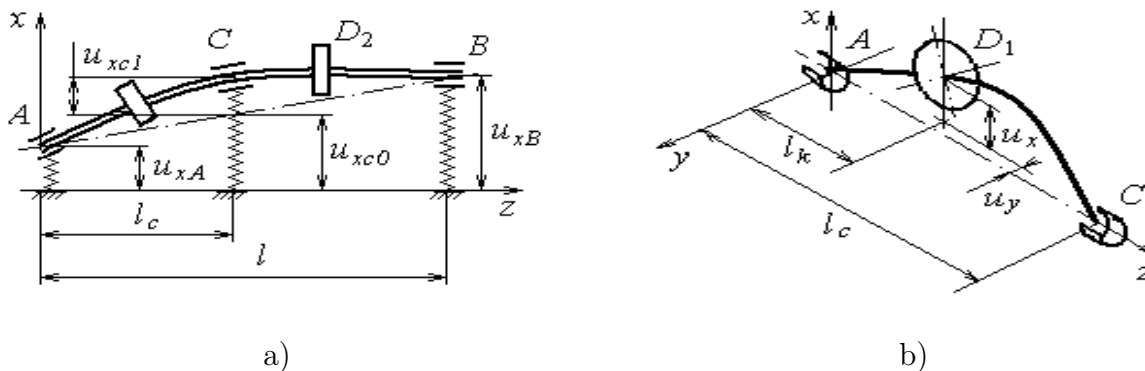


Рис. 1. Расчётная схема ротора

Кинетическая энергия диска  $T$  следующим образом:

$$T = \frac{I_1}{2} \left[ (\dot{u}'_x)_{z=l_1}^2 + (\dot{u}'_y)_{z=l_1}^2 \right] + \frac{I_0}{2} \omega^2 - I_0 \omega (\dot{u}'_x)_{z=l_1} (\dot{u}'_y)_{z=l_1} + \frac{m_0}{2} \left[ (\dot{u}_x)_{z=l_1}^2 + (\dot{u}_y)_{z=l_1}^2 \right],$$

где  $I_1$  – экваториальный момент инерции диска,  $I_0$  – полярный момент инерции диска,  $m_0$  – масса диска.

Запишем формулу потенциальной энергии вала

$$П_B = \frac{EI}{2} \int_0^l \left[ (u''_x)^2 + (u''_y)^2 \right] dz,$$

где  $E$  – модуль упругости материала вала. Потенциальная энергия деформации подшипников  $\Pi_{\text{п}}$  запишется в форме

$$\Pi_{\text{п}} = \frac{K_1}{2} (u_{xA}^2 + u_{yA}^2 + u_{xB}^2 + u_{yB}^2 + u_{xC}^2 + u_{yC}^2) + \frac{K_3}{4} (u_{xA}^4 + u_{yA}^4 + u_{xB}^4 + u_{yB}^4 + u_{xC}^4 + u_{yC}^4),$$

где  $K_1, K_3$  – коэффициенты жёсткости опор. Примем, что реакции опор имеют кубическую нелинейность. В частности, реакция промежуточной опоры будет

$$R_{xC} = K_1 u_{xC} + K_3 u_{xC}^3,$$

$$R_{yC} = K_1 u_{yC} + K_3 u_{yC}^3,$$

где  $R_{xC}, R_{yC}$  – проекции реакции на оси  $x, y$ .

Перемещение опорного сечения вала в промежуточной опоре можно выразить как сумму перемещений соответствующей точки недеформируемой оси вала и прогиба вала в этом сечении, как показано на рис.1а.

$$u_{xC} = u_{xc0} + u_{xc1}, \quad u_{yC} = u_{yc0} + u_{yc1}.$$

Перемещения опорного сечения недеформируемой оси вала  $u_{xc0}, u_{yc0}$  выражаются через перемещения крайних опор

$$u_{xc0} = u_{xA} (1 - l_c/l) + u_{xB} (l_c/l),$$

$$u_{yc0} = u_{yA} (1 - l_c/l) + u_{yB} (l_c/l).$$

Определим перемещения вала [5]

$$\begin{aligned} u_x(z, t) &= \sum_{n=1}^N U_{x,n}(t) \sin \frac{n\pi z}{l} + U_{x,N+1}(t) \frac{z}{l} + U_{x,N+2}(t) \frac{l-z}{l}, \\ u_y(z, t) &= \sum_{n=1}^N U_{y,n}(t) \sin \frac{n\pi z}{l} + U_{y,N+1}(t) \frac{z}{l} + U_{y,N+2}(t) \frac{l-z}{l}, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $U_{x,n}(t), U_{y,n}(t)$  – обобщённые перемещения;  $N$  – количество координатных функций вала;  $N+1, N+2$  – номера функций, соответствующие перемещениям крайних опор. Для перемещений промежуточной опоры формулы (1) примут вид

$$\begin{aligned} u_{xC} &= \sum_{n=1}^N U_{x,n}(t) \sin \frac{n\pi l_c}{l} + U_{x,N+1}(t) \frac{l_c}{l} + U_{x,N+2}(t) \frac{l-l_c}{l}, \\ u_{yC} &= \sum_{n=1}^N U_{y,n}(t) \sin \frac{n\pi l_c}{l} + U_{y,N+1}(t) \frac{l_c}{l} + U_{y,N+2}(t) \frac{l-l_c}{l}, \end{aligned} \quad (2)$$



Соотношения (1) и (2) вводятся в кинетическую и потенциальную энергии. Тогда кинетическая и потенциальная энергии системы будут выражены через обобщённые скорости и обобщённые перемещения

$$T = T_B + T_D = T \left( \dot{U}_{x,1}, \dots, \dot{U}_{x,N+2}, \dot{U}_{y,1}, \dots, \dot{U}_{y,N+2} \right),$$

$$\Pi = \Pi_B + \Pi_\Pi = \Pi \left( U_{x,1}, \dots, U_{x,N+2}, U_{y,1}, \dots, U_{y,N+2} \right).$$

Составим матричное уравнение движения в виде уравнений Лагранжа второго рода. В результате получим

$$[M] \{\ddot{U}\} + [G] \{\dot{U}\} + [K] \{U\} + [\widehat{K}] \{U^3\} + [\check{K}] \{U_\mu^2 U_\nu\} + [\tilde{K}] \{U_\lambda U_\mu U_\nu\} = 0, \quad (3)$$

где  $[K]$  – матрица жесткости,  $[G]$  – гироскопическая матрица,  $[M]$  – матрица масс,  $\{U\}$  – вектор перемещений,  $[\widehat{K}]$ ,  $[\check{K}]$ ,  $[\tilde{K}]$  – матрицы коэффициентов при нелинейных произведениях перемещений,  $\lambda, \mu, \nu = 1, 2N+4$ . В нечётных строках вектора  $\{U\}$  запишем обобщенные перемещения по оси  $x$ , в чётных – по оси  $y$  так, чтобы перемещения опорных сечений были в последних строках:

$$\{U\} = [ U_1 \quad U_2 \quad \dots \quad U_{2N+1} \quad U_{2N+2} \quad U_{2N+3} \quad U_{2N+4} ]^T.$$

Количество нелинейных произведений перемещений вида  $U_\mu^2 U_\nu$  в каждом из уравнений, входящих в систему (3), равно  $(N+2) \cdot (N+1) = N^2 + 3N + 2$ . В полной системе уравнений (3) такие произведения есть в уравнениях движения по двум координатным направлениям, поэтому размерность матрицы  $[\check{K}]$  равна  $(2N+4) \times (2N^2 + 6N + 4)$ . Размерность остальных матриц –  $(2N+4) \times (2N+4)$ .

Компоненты матриц линейных членов (3) имеют следующий вид:

$$K_{2n-1,2n-1} = K_{2n,2n} = K_1 \sin^2 \frac{n\pi l_c}{l} + \frac{EI n^2 \pi^4}{2l^3},$$

$$K_{2n-1,2m-1} = K_{2n,2m} = K_1 \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin \frac{m\pi l_c}{l},$$

$$K_{2n-1,2N+1} = K_{2n,2N+2} = K_{2N+1,2n-1} = K_{2N+2,2n} = K_1 \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right) \sin \frac{n\pi l_c}{l},$$

$$K_{2n-1,2N+3} = K_{2n,2N+4} = K_{2N+3,2n-1} = K_{2N+4,2n} = K_1 \left( \frac{l_c}{l} \right) \sin \frac{n\pi l_c}{l},$$

$$K_{2N+3,2N+3} = K_{2N+4,2N+4} = K_1 + K_1 \left( \frac{l_c}{l} \right)^2,$$

$$K_{2N+1,2N+1} = K_{2N+2,2N+2} = K_1 + K_1 \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right)^2,$$

$$K_{2N+3,2N+3} = K_{2N+4,2N+4} = K_1 + K_1 \left( \frac{l_c}{l} \right)^2,$$

$$K_{2N+1,2N+3} = K_{2N+4,2N+2} = K_1 \left( \frac{l_c}{l} \right) \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right),$$

$$G_{2n,2m-1} = \frac{I_0 \omega n m \pi^2}{l^2} \cos \frac{n \pi l_k}{l} \cos \frac{m \pi l_k}{l},$$

$$G_{2n,2n-1} = \frac{\rho I \omega n^2 \pi^2}{l} + \frac{I_0 \omega n^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{n \pi l_k}{l},$$

$$G_{2N+1,2m} = G_{2N+4,2m-1} = G_{2n-1,2N+2} = G_{2n,2N+3} = \frac{I_0 \omega m \pi}{l^2} \cos \frac{m \pi l_k}{l},$$

$$G_{2N+1,2N+2} = G_{2N+2,2N+3} = G_{2N+4,2N+1} = G_{2N+3,2N+4} = \frac{2 \rho I \omega}{l} + \frac{I_0 \omega}{l^2},$$

$$M_{2n-1,2m-1} = M_{2n,2m} = m_0 \sin \frac{n \pi l_k}{l} \sin \frac{m \pi l_k}{l} + \frac{I_1 n m \pi^2}{l^2} \cos \frac{n \pi l_k}{l} \cos \frac{m \pi l_k}{l},$$

$$M_{2n-1,2n-1} = M_{2n,2n} = \frac{\rho S l}{2} + \frac{n^2 \pi^2 \rho I}{2l} + \frac{I_1 n^2 \pi^2}{l^2} \cos^2 \frac{n \pi l_k}{l},$$

$$M_{2N+1,2m-1} = M_{2N+2,2m} = \frac{-\rho S l (-1)^m}{m \pi} + \frac{m_0 l_k}{l} \sin \frac{m \pi l_k}{l} + \frac{I_1 m \pi}{l^2} \cos \frac{n \pi l_k}{l},$$

$$M_{2N+1,2N+1} = M_{2N+2,2N+2} = \frac{\rho S l}{3} + \frac{\rho I}{l} + \frac{m_0 l_k^2}{l^2} + \frac{I_1}{l^2},$$

$$M_{2N+1,2N+3} = M_{2N+2,2N+4} = M_{2N+3,2N+1} =$$

$$= \frac{-\rho S l (-1)^m}{m \pi} + \frac{m_0 l_k}{l} \sin \frac{m \pi l_k}{l} + \frac{I_1 m \pi}{l^2} \cos \frac{n \pi l_k}{l},$$

$$M_{2N+3,2N+3} = M_{2N+4,2N+4} = \frac{\rho S l}{3} + \frac{\rho I}{l} + \frac{m_0 (l - l_k)^2}{l^2} + \frac{I_1}{l^2},$$

где  $n = \overline{1, N}$ ,  $m = \overline{1, N}$ ,  $n \neq m$ . Остальные компоненты матриц равны нулю. Матрицы  $[K]$  и  $[M]$  – симметричные, матрица  $[G]$  – кососимметричная.

Компоненты матрицы  $[\widehat{K}]$  имеют следующий вид:

$$\widehat{K}_{2n-1,2n-1} = \widehat{K}_{2n,2n} = K_3 \cdot \sin^4 \frac{n \pi l_c}{l},$$

$$\begin{aligned} \widehat{K}_{2n-1,2m-1} &= \widehat{K}_{2n,2m} = K_3 \sin \frac{n\pi l_c}{l} \cdot \sin^3 \frac{m\pi l_c}{l} \\ \widehat{K}_{2n-1,2N+1} &= \widehat{K}_{2n,2N+2} = K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^3 \sin \frac{n\pi l_c}{l}, \\ \widehat{K}_{2n-1,2N+3} &= \widehat{K}_{2n,2N+4} = K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^3 \sin \frac{n\pi l_c}{l}, \\ \widehat{K}_{2N+1,2n-1} &= \widehat{K}_{2N+2,2n} = K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right) \sin^3 \frac{n\pi l_c}{l}, \\ \widehat{K}_{2N+3,2n-1} &= \widehat{K}_{2N+4,2n} = K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \sin^3 \frac{n\pi l_c}{l}. \\ \widehat{K}_{2N+1,2N+1} &= \widehat{K}_{2N+2,2N+2} = K_3 + K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^4, \\ \widehat{K}_{2N+3,2N+3} &= \widehat{K}_{2N+4,2N+4} = K_3 + K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^4, \\ \widehat{K}_{2N+1,2N+3} &= \widehat{K}_{2N+2,2N+4} = K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right)^3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right), \\ \widehat{K}_{2N+3,2N+1} &= \widehat{K}_{2N+4,2N+2} = K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^3. \end{aligned}$$

Нелинейные произведения координат могут быть расположены в строках векторов  $\{U_\mu^2 U_\nu\}$  и  $\{U_\lambda U_\mu U_\nu\}$  в том или ином порядке. Этот порядок определяет расположение компонент в матрицах  $[\check{K}]$  и  $[\tilde{K}]$ . Компоненты матрицы  $[\check{K}]$ , которые в уравнении  $2n - 1$  системы (3) умножаются на произведения перемещений по оси  $x - U_\mu^2 U_\nu$ ,  $U_\mu^2 U_{2N+1}$ ,  $U_\mu^2 U_{2N+3}$ ,  $U_{2N+1}^2 U_\mu$ ,  $U_{2N+3}^2 U_\mu$ ,  $U_{2N+1}^2 U_{2N+3}$ ,  $U_{2N+3}^2 U_{2N+1}$ , ( $\mu, \nu = \overline{1, 3, 2N-1}$ ), имеют соответственно вид

$$\begin{aligned} \check{K}_{2n-1,m} &= 3K_3 \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin^2 \frac{[(\mu+1)/2] \pi l_c}{l} \sin \frac{[(\nu+1)/2] \pi l_c}{l}, \\ \check{K}_{2n-1,m} &= 3K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin^2 \frac{[(\mu+1)/2] \pi l_c}{l}, \\ \check{K}_{2n-1,m} &= 3K_3 \left(\frac{l_c}{l}\right) \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin^2 \frac{[(\mu+1)/2] \pi l_c}{l}, \\ \check{K}_{2n-1,m} &= 3K_3 \left(1 - \frac{l_c}{l}\right)^2 \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu+1)/2] \pi l_c}{l}, \end{aligned}$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right)^2 \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l}.$$

Для строки  $2N + 1$  аналогичные компоненты матрицы  $[\check{K}]$  имеют вид

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right) \sin \frac{[(\nu + 1)/2] \pi l_c}{l} \sin^2 \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right) \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right) \sin^2 \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right)^3 \sin \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right)^2 \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right) \sin \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right) \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right)^3,$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right)^2 \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right)^2.$$

Для строки  $2N + 3$  аналогичные компоненты матрицы  $[\check{K}]$  имеют вид:

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right) \sin \frac{[(\nu + 1)/2] \pi l_c}{l} \sin^2 \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right) \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right) \sin^2 \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right)^2 \sin^2 \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right) \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right)^2 \sin \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right)^3 \sin \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right)^2 \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right)^2,$$



$$\check{K}_{2n-1,m} = 3K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right)^3 \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right).$$

Компоненты матрицы  $[\check{K}]$ , которые в уравнении  $2n - 1$  системы (3) умножаются на произведения перемещений по оси  $x$   $U_\mu U_\nu U_A$ ,  $U_\mu U_\nu U_B$ ,  $U_\mu U_A U_B$ , соответственно имеют вид

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right) \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\nu + 1)/2] \pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right) \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\nu + 1)/2] \pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right) \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right) \sin \frac{n\pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l}$$

Для строки  $2N + 1$  аналогичные компоненты матрицы  $[\check{K}]$  имеют вид

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right)^2 \sin \frac{[(\nu + 1)/2] \pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right) \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right) \sin \frac{[(\nu + 1)/2] \pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right) \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right)^2 \sin \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l}.$$

Для строки  $2N + 3$  аналогичные компоненты матрицы  $[\check{K}]$  имеют вид

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right) \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right) \sin \frac{[(\nu + 1)/2] \pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right)^2 \sin \frac{[(\nu + 1)/2] \pi l_c}{l} \sin \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l},$$

$$\tilde{K}_{2n-1,m} = 6K_3 \left( \frac{l_c}{l} \right)^2 \left( 1 - \frac{l_c}{l} \right) \sin \frac{[(\mu + 1)/2] \pi l_c}{l}.$$

Такие же компоненты матриц  $[\check{K}]$  и  $[\check{K}']$  расположены в строках, которые умножаются на нелинейные произведения перемещений по оси  $y$ . Умножив (3) на  $[M]^{-1}$  получим

$$\{\ddot{U}\} + [G'] \{\dot{U}\} + [K'] \{U\} + [\check{K}'] \{U^3\} + [\check{K}'] \{U_\mu^2 U_\nu\} + [\check{K}'] \{U_\lambda U_\mu U_\nu\} = 0.$$



## 2. Нелинейные нормальные формы колебаний

ННФ дают возможность упростить без потери точности и наглядности решения задач нелинейной динамики. Основа этого метода заключается в том, что система  $N$  нелинейных дифференциальных уравнений заменяется одним уравнением.

Принимаем, что при движении по ННФ обобщённые координаты изменяются синхронно. Тогда все фазовые координаты можно выразить через одну, выбранную произвольно, пару фазовых координат, которая имеет номер  $J$  [7]:  $p$  – перемещение и  $q = \dot{p}$  – скорость. Представим ННФ в следующем виде:

$$\begin{Bmatrix} U \\ V \end{Bmatrix} = [\gamma] \begin{Bmatrix} p \\ q \end{Bmatrix},$$

где  $V = \dot{U}$  – обобщённые скорости,  $[\gamma]$  – матрица коэффициентов разложения перемещений и скоростей в степенной ряд по фазовым координатам. Тогда

$$p_n(p, q) = \gamma_{n,1}p + \gamma_{n,2}q + \gamma_{n,3}p^2 + \gamma_{n,4}pq + \gamma_{n,5}q^2 + \gamma_{n,6}p^3 + \\ + \gamma_{n,7}p^2q + \gamma_{n,8}pq^2 + \gamma_{n,9}q^3 + \gamma_{n,10}p^4 + \gamma_{n,11}p^3q + \gamma_{n,12}p^2q^2 + \gamma_{n,13}pq^3 + \gamma_{n,14}q^4,$$

$$q_n(p, q) = \gamma_{2N+4+n,1}p + \gamma_{2N+4+n,2}q + \gamma_{2N+4+n,3}p^2 + \gamma_{2N+4+n,4}pq + \\ + \gamma_{2N+4+n,5}q^2 + \gamma_{2N+4+n,6}p^3 + \gamma_{2N+4+n,7}p^2q + \gamma_{2N+4+n,8}pq^2 + \gamma_{2N+4+n,9}q^3, \quad (4)$$

где  $n = \overline{1, \dots, J-1, J+1, \dots, 2N+4}$  – номера степеней свободы.

Определим коэффициенты линейной части (4). Согласно работе [6]

$$\gamma_{n,1} = \frac{\varsigma_n \delta_{2N+5} - \varsigma_{2N+5} \delta_n}{\varsigma_1 \delta_{2N+5} - \varsigma_{2N+5} \delta_1},$$

$$\gamma_{n,2} = \frac{\varsigma_1 \delta_n - \varsigma_n \delta_1}{\varsigma_1 \delta_{2N+5} - \varsigma_{2N+5} \delta_1},$$

где  $\varsigma$  и  $\delta$  – действительная и мнимая части собственных векторов линейной части системы (3),  $n = \overline{1, 2N+4}$ .

Дифференцируя (4), получим

$$\dot{p}_n(p, q) = \frac{\partial p_n(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial p_n(p, q)}{\partial q} \dot{q}, \\ \dot{q}_n(p, q) = \frac{\partial q_n(p, q)}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial q_n(p, q)}{\partial q} \dot{q}. \quad (5)$$

Обозначим

$$\{\dot{q}_j\} = - \left( [G'] \{q_j\} + [K'] \{p_j\} + [\widehat{K}'] \{p_j^3\} + [\check{K}'] \{p_j^2 p_m\} + [\tilde{K}'] \{p_j p_m p_n\} \right) =$$



$$= \{W_j(\{p\}, \{q\})\}, \quad (6)$$

где  $j$  – номер формы. Подставив (6) в (5) и сохраняя слагаемые не выше третьей степени относительно  $p$  и  $q$ , получим

$$\dot{p}_{j,n} = q_{j,n} = \frac{\partial p_{j,n}}{\partial p_{j,1}} q_{j,1} + \frac{\partial p_{j,n}}{\partial q_{j,1}} W_{j,1}(p_{j,1}, q_{j,1}),$$

$$\dot{q}_{j,n} = W_{j,n}(p_{j,1}, q_{j,1}) = \frac{\partial q_{j,n}}{\partial p_{j,1}} q_{j,1} + \frac{\partial q_{j,n}}{\partial q_{j,1}} W_{j,1}(p_{j,1}, q_{j,1}).$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях  $p^\mu q^\nu$ , мы приходим к системе линейных алгебраических уравнений относительно компонент матрицы  $[\gamma]$ . В результате решения этой системы получим ННФ.

Построенную ННФ (4) вводим в первое уравнение системы (6). В результате получим одно обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее движение по ННФ

$$\dot{q} + B_1 q + B_2 p + B_3 p^3 + B_4 p^2 q + B_5 p q^2 + B_6 q^3 = 0, \quad (7)$$

где

$$B_1 = \sum_{n=1}^{2N+4} G'_{J,n} \gamma_{2N+4+n,2} + \sum_{n=1}^{2N+4} K'_{J,n} \gamma_{n,2},$$

$$B_2 = \sum_{n=1}^{2N+4} G'_{J,n} \gamma_{2N+4+n,1} + \sum_{n=1}^{2N+4} K'_{J,n} \gamma_{n,1},$$

$$B_3 = \sum_{n=1}^{2N+4} G'_{J,n} \gamma_{2N+4+n,6} + \sum_{n=1}^{2N+4} K'_{J,n} \gamma_{n,6} + \sum_{n=1}^{2N+4} \widehat{K}'_{J,n} \gamma_{n,1}^3 +$$

$$+ \sum_{n=1}^{2N^2+6N+4} \check{K}'_{J,n} \gamma_{\mu,1}^2 \gamma_{\nu,1} + \sum_{n=1}^{2N+4} \tilde{K}'_{J,n} \gamma_{\lambda,1} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\nu,1},$$

$$B_4 = \sum_{n=1}^{2N+4} G'_{J,n} \gamma_{2N+4+n,7} + \sum_{n=1}^{2N+4} K'_{J,n} \gamma_{n,7} + \sum_{n=1}^{2N+4} 3 \widehat{K}'_{J,n} \gamma_{n,1}^2 \gamma_{n,2} +$$

$$+ \sum_{n=1}^{2N^2+6N+4} \check{K}'_{J,n} (\gamma_{\mu,1}^2 \gamma_{\nu,2} + 2 \gamma_{\nu,1} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\mu,2}) +$$

$$+ \sum_{n=1}^{2N+4} \tilde{K}'_{J,n} (\gamma_{\lambda,1} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\nu,2} + \gamma_{\lambda,1} \gamma_{\mu,2} \gamma_{\nu,1} + \gamma_{\lambda,2} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\nu,1}),$$

$$B_5 = \sum_{n=1}^{2N+4} G'_{J,n} \gamma_{2N+4+n,8} + \sum_{n=1}^{2N+4} K'_{J,n} \gamma_{n,8} + \sum_{n=1}^{2N+4} 3 \widehat{K}'_{J,n} \gamma_{n,2}^2 \gamma_{n,1} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{n=1}^{2N^2+6N+4} \check{K}'_{J,n} (\gamma_{\mu,2}^2 \gamma_{\nu,1} + 2\gamma_{\nu,2} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\mu,2}) + \\
 & + \sum_{n=1}^{2N+4} \check{K}'_{J,n} (\gamma_{\lambda,1} \gamma_{\mu,2} \gamma_{\nu,2} + \gamma_{\lambda,2} \gamma_{\mu,2} \gamma_{\nu,1} + \gamma_{\lambda,2} \gamma_{\mu,1} \gamma_{\nu,2}) , \\
 B_6 = & \sum_{n=1}^{2N+4} G'_{J,n} \gamma_{2N+4+n,9} + \sum_{n=1}^{2N+4} K'_{J,n} \gamma_{n,9} + \sum_{n=1}^{2N+4} \widehat{K}'_{J,n} \gamma_{n,2}^3 + \\
 & + \sum_{n=1}^{2N^2+6N+4} \check{K}'_{J,n} \gamma_{\mu,2}^2 \gamma_{\nu,2} + \sum_{n=1}^{2N+4} \check{K}'_{J,n} \gamma_{\lambda,2} \gamma_{\mu,2} \gamma_{\nu,2} .
 \end{aligned}$$

Значения индексов  $\lambda, \mu, \nu$  зависят от построения векторов  $\{U_\mu^2 U_\nu\}$  и  $\{U_\lambda U_\mu U_\nu\}$ . Поскольку мы приняли кубическую нелинейность, квадратичные члены в (7) отсутствуют.

### 3. Численный анализ колебаний

На рис. 2 изображена ННФ колебаний ротора на нелинейных опорах со следующими параметрами:  $l = 1$  м,  $l_1 = 0,25$  м,  $l_c = 0,50$  м,  $l_2 = 0,75$  м, диаметр вала  $d = 0,02$  м,  $m_0 = 10$  кг,  $I_1 = 0,1$  кг·м<sup>2</sup>,  $I_0 = 0,2$  кг·м<sup>2</sup>,  $\omega = 628,3$  рад/с. Коэффициенты жесткости опор:  $K_1 = 100$  Н/м,  $K_3 = 10$  Н/м<sup>3</sup>.

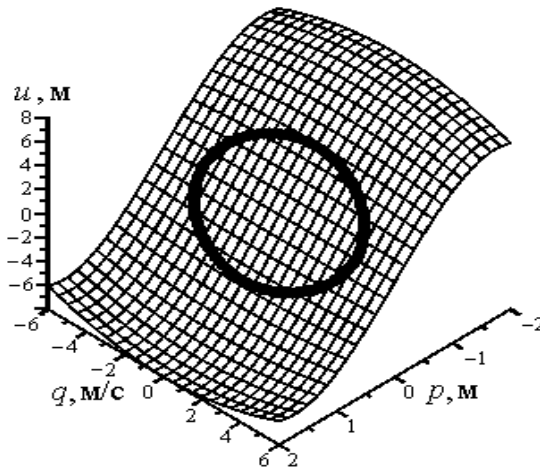


Рис. 2. ННФ трёхопорного ротора

Проверка правильности построения ННФ выполнена численным интегрированием полной системы уравнений движения (3) при задании начальной точки фазой траектории на поверхности нормальной моды. Фазовая траектория лежит на ННФ, как показано на рис. 2 жирной линией.

Для исследования амплитудно-частотных характеристик этих колебаний применён метод гармонического баланса [8]. На рис. 3 показаны скелетные кривые ротора на двух опорах (линия 1) и с дополнительной опорой (линия 2).

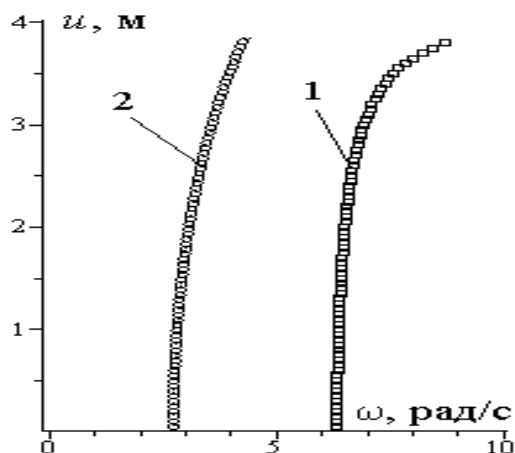


Рис. 3. Скелетные кривые ротора

### Заключение

Разработана методика исследования нелинейных колебаний многопролётного упругого ротора с распределённой массой и дисками. Построены нелинейные нормальные формы и фазовые траектории системы на двух нелинейных опорах и с дополнительной нелинейной опорой. Исследованы скелетные кривые системы с учётом распределённой массы вала и масс и моментов инерции дисков. Влияние промежуточной опоры заключается в увеличении жёсткости и резонансных частот системы.

### Литература

1. Диментберг Ф.М. Изгибные колебания вращающихся валов / Ф.М. Диментберг. – М.: Изд-во АН СССР, 1959. – 248 с.
2. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов / А. Тондл. – Л.: Энергия, 1971. – 388 с.
3. Голоскоков Е.Г., Филиппов А.П. Нестационарные колебания деформируемых систем / Е.Г. Голоскоков, А.П. Филиппов. – Киев: Наук. думка, 1977. – 340 с.
4. Shaw S.W., Pierre C. Normal modes for nonlinear vibratory systems // J. Sound and Vibr. – 1993. – 164. – P.85-124.
5. Legrand M., Jiang D., Pierre C. Shaw S.W. Nonlinear placeNormal Modes of a Rotating Shaft Based on the Invariant Manifold Method // International Journal of Rotating Machinery. – 2004. – 10;4. – P.319-335.



6. Аврамов К.В., Пьерр К., Ширяева Н.С. Нелинейные нормальные формы колебаний систем с гироскопическими силами // Доклады Национальной академии наук Украины. – 2006. – 1. – С.7-10.
7. Филипковский С.В., Аврамов К.В. Колебания роторов на нелинейных опорах // Вестник двигателестроения. – 2009. – 3. – С.127-132.
8. Хаяси Т. Нелинейные колебания в физических системах / Т. Хаяси. – М.: Мир, 1968. – 432 с.

## MULTISPAN ROTOR TRANSVERSE OSCILLATIONS ON NONLINEAR BEARINGS

S.V. Filipkovsky

A.N. Podgorny Institute for Mechanical Engineering Problems National Academy of Science of Ukraine,  
Pozarsky St., 2/10, Kharkov, 61046, Ukraine, e-mail: [svfil@ipmach.kharkov.ua](mailto:svfil@ipmach.kharkov.ua)

**Abstract.** Oscillations of the asymmetrical rotor which is placed on three bearings is studied. The mathematical model takes into account the cubic nonlinearity of rigidity. Gyroscopic torques, elasticity and the distributed mass of shaft are also taken into account. The model is reduced to the system of ordinary differential second-kind equations. The method of nonlinear normal modes of Shaw and Pierre is applied to study the system. Forms of disk oscillations and phase trajectories are obtained. The system amplitude-frequency response is investigated. The backbone curves of nonlinear oscillations of the single-slope and multispans rotors are constructed.

**Key words:** rotor, nonlinear bearings, nonlinear normal modes method, phase trajectories, backbone curves.



ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

**ИСПРАВЛЕНИЯ К СТАТЬЕ  
«УСРЕДНЕННЫЕ МОДЕЛИ ДИФФУЗИИ И КОНВЕКЦИИ ПРИМЕСЕЙ  
В АБСОЛЮТНО ТВЕРДЫХ ПОРИСТЫХ СРЕДАХ»**

**Св.А. Гриценко, А.М. Мейрманов**

Белгородский государственный университет,  
ул. Победы, 85, Белгород, 308015, Россия, e-mail: [sgritsenko@bsu.edu.ru](mailto:sgritsenko@bsu.edu.ru).

В предлагаемом сообщении приведено исправление допущенных авторами опечаток в статье, указанной в заголовке, опубликованной в журнале «Научные ведомости Белгородского государственного университета».– 2009. – 13(68);17/2.

В этой статье на стр. 84 в формуле (12)  $\Gamma$  следует заменить на  $\Gamma^\varepsilon$ ,  $\Omega$  – заменить на  $\Omega^\varepsilon$ , правильный вариант такой:

$$\mathbf{u}(x, t) = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma^\varepsilon, \quad \mathbf{u}(x, 0) = 0 \quad \text{при } x \in \Omega^\varepsilon. \quad (12)$$

На стр. 85 в формуле (20)  $S$  следует заменить на  $\Gamma^\varepsilon$ , правильный вариант такой:

$$\mathbf{u}_h^*(x, t) = 0 \quad \text{при } x \in \Gamma^\varepsilon, \quad \mathbf{u}_h^*(x, 0) = 0. \quad (20)$$

На стр. 86 в следствии 1 обозначение  $L_3$  следует заменить на  $L_2$ , то есть правильный вариант:

*Пусть последовательность  $\{\varphi_\varepsilon\} \subset L_2(\Omega_T)$  . . . .*

**CORRIGENDUM OF  
«AVERAGED MODELS OF IMPURITY DIFFUSION  
AND ITS CONVECTION  
IN ABSOLUTE SOLID POROUS MEDIA»**

**Sv.A. Gritsenko, A.M.Meyermanov**

Belgorod State University,  
Pobedy St., 85, Belgorod, 308015, Russia, e-mail: [sgritsenko@bsu.edu.ru](mailto:sgritsenko@bsu.edu.ru)



### СВЕДЕНИЯ ОБ АВТОРАХ

- Авад Х.К. – аспирант Белгородского государственного университета
- Александрова Л.А. – аспирант кафедры прикладной математики  
Санкт-Петербургского государственного университета  
гражданской авиации
- Антонова Е.С. – аспирант Белгородского государственного университета
- Бакланов Д.А. – аспирант Белгородского государственного университета
- Береславский Э.Н. – доктор физико-математических наук,  
профессор кафедры прикладной математики  
Санкт-Петербургского государственного университета  
гражданской авиации
- Вирченко Ю.П. – доктор физико-математических наук, зав.кафедрой  
теоретической и математической физики  
Белгородского государственного университета
- Внуков И.Е. – доктор физико-математических наук,  
зав.кафедрой общей и прикладной физики  
Белгородского государственного университета
- Гальцев О.В. – аспирант Белгородского государственного университета
- Гальцева О.А. – аспирант Белгородского государственного университета
- Глаголев В.В. – старший научный сотрудник  
Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна
- Глушак А.В. – доктор физико-математических наук,  
декан математического факультета  
Белгородского государственного университета
- Гриценко Св.А. – старший преподаватель математического факультета  
Белгородского государственного университета
- Жандармов Ю.В. – аспирант Белгородского государственного университета
- Ладыгин В.П. – доктор физико-математических наук,  
начальник сектора ЛФВЭ Объединенного  
института ядерных исследований, г.Дубна





- Ладыгина Н.Б. – ведущий научный сотрудник,  
Объединенного института ядерных исследований, г.Дубна
- Лактионова С.А. – магистрант Белгородского государственного университета
- Мейрманов А.М. – доктор физико-математических наук,  
зав.кафедрой прикладной математики  
Белгородского государственного университета
- Некрасова И.В. – аспирант Белгородского государственного университета
- Остапенко В.А. – доктор физико-математических наук,  
профессор Днепропетровского национального  
университета, г.Днепропетровск, Украина
- Пестерев Е.В. – студент кафедры прикладной математики  
Санкт-Петербургского государственного университета  
гражданской авиации
- Покручин О.А. – аспирант Белгородского государственного университета
- Рязанов К.С. – аспирант Белгородского государственного университета
- Терехин А.А. – аспирант Белгородского государственного университета
- Филипковский С.В. – кандидат технических наук, старший научный сотрудник  
Института проблем машиностроения НАН Украины  
г.Харьков
- Шатохин Р.А. – кандидат физико-математических наук,  
Белгородский государственный университет
- Шпилинская О.Л. – кандидат физико-математических наук,  
младший научный сотрудник  
Института монокристаллов НАНУ, г.Харьков

## ИНФОРМАЦИЯ ДЛЯ АВТОРОВ

Журнал «Научные ведомости БелГУ. Серия: Математика, Физика» выходит четыре раза в год. Два выпуска журнала посвящены чисто математическим работам и два – работам по физике и прикладной математике.

Редколлегия журнала принимает от авторов рукописи статей, написанные на русском или на английском языках, по различным разделам математики и физики. Содержание статей может содержать как результаты оригинальных исследований автора (ов), так и представлять собой обзор по выбранной автором (ами) теме.

Статья должна быть написана с достаточной степенью подробности и с таким расчётом, чтобы быть понятной не только узким специалистам по выбранному автором (ами) направлению исследований, но более широкому кругу математиков и (или) физиков. Ни в коем случае рукопись не должна представлять собой краткий отчёт о проведенных исследованиях, написанный в виде краткого сообщения, не содержащий описания постановки задачи (условий проведения эксперимента, если это экспериментальная работа по физике). В связи с этим, рукопись должна быть структурирована — разделена на разделы, представляющие отдельные смысловые единицы текста. В любом случае, рукопись должна содержать введение и заключение. Разделы должны быть пронумерованы и иметь заголовки.

Во введении должны быть описаны: проблема, которой посвящена рукопись, определено место этой проблемы в общем объёме физико-математического знания, представлены краткая история вопроса и полученный автором (ами) результат. В заключении работы должна быть дана характеристика полученного результата с указанием его значения для дальнейшего развития темы исследования.

Те же самые требования к введению и заключению предъявляются и для обзорной статьи, с той лишь разницей, что их содержание должно быть посвящено описанию всей совокупности результатов, отражающих состояние выбранной автором области исследований, и сам текст должен быть написан с большей степенью подробности.

Возможна также публикация статьи, носящей методический характер. Но в этом случае решение о возможности публикации такой рукописи принимается редколлекцией отдельно.

Рукопись должна быть оформлена в соответствии с традициями написания, соответственно, математических и физических текстов. В частности, в математических текстах должны быть чётко выделены такие структурные единицы, как формулировки определений, теорем и лемм, следствий и замечаний, отмечены начала и окончания доказательств.

Полный объём рукописи, которая представляет собой оригинальное исследование, не должен превышать 20 страниц формата А4. Она должна быть написана шрифтом 14pt через два интервала. Объём обзорной статьи необходимо заранее оговорить с редколлекцией журнала.

После подготовки одним из членов редколлекции заключения о соответствии рукописи нормам журнала "Научные ведомости" она рассматривается на общем собрании редколлекции. В отдельных случаях редколлекцией может быть принято решение о более



тщательном изучении рукописи внешним (не входящем в состав редколлегии журнала) рецензентом. Редколлегия оставляет за собой право на мелкие стилистические исправления текста рукописи после принятия решения о её публикации.

### **В редакцию присылаются следующие файлы:**

- 1) основная содержательная часть, представляемая на русском или английском языках. При этом название статьи должно состоять не более чем из 20 слов.
- 2) номер УДК того научного направления, которому посвящена статья;
- 3) список авторов с указанием порядка их размещения при публикации статьи;
- 4) аннотация на русском языке; её объём не должен превышать 10-12 строк, написанных шрифтом 12pt;
- 5) список ключевых слов (не более 10-12);
- 6) текст перевода заголовка статьи, аннотации и ключевых слов на английском языке;
- 7) список литературных источников, на которые имеются ссылки в тексте рукописи;
- 8) данные об авторах статьи с указанием места их работы, точного почтового адреса и занимаемой должности. Должны быть указаны адреса электронной почты. Эти данные необходимо представить также на английском языке. Кроме того, должна быть дана латинская транскрипция фамилий авторов. Соответственно, для статей на английском языке должна быть дана транскрипция фамилий авторов кириллицей;
- 9) списка подписей к рисункам, если они имеются в рукописи.

В редакцию присылается электронный вариант рукописи. Он должен быть подготовлен в редакторе LaTeX (LaTeX2e, AMSLaTeX). При этом нужно также прислать файл с pdf-копией рукописи для того, чтобы редакция имела возможность сравнения его с авторским оригиналом при редактировании.

Особое внимание должно быть уделено рисункам, если они имеются в рукописи. Они должны быть качественно оформлены и приготовлены в виде отдельных электронных файлов в формате "ps" (можно также присылать файлы рисунков в формате "eps", но при этом нужно проследить, чтобы они были приготовлены в "векторном формате", то есть так, чтобы их можно было транслировать в формат "ps"). Файлы рисунков необходимо пронумеровать в соответствии со списком подписей к рисункам (см. п.7).

### **Внимание!**

1. На представляемых в электронном формате рисунках не следует наносить те комментирующие их подписи, которые присылаются в редколлегию отдельным списком.
2. Если в тексте работы есть таблицы, то их следует формировать на основе программы LaTeX и ни в коем случае не оформлять в виде рисунков.

Обращаем внимание авторов на то, что список литературы должен быть оформлен строго в соответствии с существующим ГОСТом. При этом нужно обратить особое внимание на то, чтобы были указаны полные названия журнальных статей и статей в сборниках, на которые есть ссылки в тексте рукописи, а также указаны не только начальные страницы этих статей, но обязательно также и конечные. Каждая из монографий в списке цитируемой литературы обязательно должна быть дана с указанием полного числа страниц.

**Особые требования к электронному набору** в редакторе LaTeX (LaTeX, AMS LaTeX) следующие:

- 1) нельзя использовать вводимые авторами новые нестандартные команды;
- 2) выключные формулы должны быть пронумерованы в порядке их появления в рукописи в том случае, если на них есть ссылки в тексте. При использовании режима equation для набора выключных формул обязательно употребление для их нумерации соответствующих номеров формул в тексте. Допускается применение для меток формул цифр, снабжённых штрихами (или цифр совместно с буквами латинского алфавита). Однако этим нужно пользоваться только в случае крайней необходимости с целью более точной передачи смысла текста;
- 3) в случае, если в статье имеются разделы в виде *приложений* в конце основного текста работы, нумерация содержащихся в них выключных формул может быть независимой от нумерации основного текста. При этом в приложениях рекомендуется употребление двойной нумерации, в которой первый символ может быть прописной буквой или номером приложения. Каждый из разделов-приложений начинается словом ПРИЛОЖЕНИЕ с порядковым номером этого приложения. Это слово должно быть выровнено по правому полю страницы. Затем следует заголовок этого приложения;
- 4) литературные источники в ссылках на основе команд ref или cite в электронном тексте рукописи нужно обозначать цифрами, соответствующими их порядковому номеру появления в тексте, и ни в коем случае не использовать метки другого типа.